INSTITUZIONE
IDRODINAMICA

DI

GIROLAMO MAZZUCHELLI

C. R. S.

SOCIO DI VARIE ACCADEMIE.

TOMO II.

IN PAVIA MDCCXCVI.

PER GLI EREDI DI PIETRO GALEAZZI.

CON PERMISSIONE.

PARTE SECONDA.

IDRAULICA, E SUA DIVISIONE.

1. Le leggi dell'equilibrio dei fluidi, le quali formano l'oggetto della Idrostatica, sono, siccome abbiam già veduto, di facile ricerca, poche in numero, e certe. Ma quelle del moto degli stessi, intorno alle quali si raggira l'Idraulica, sono sommamente astruse, varie, e sottoposte a gravissime difficoltà. Ond'è, che l'Idraulica, non ostante gli sforzi, che han fatto dopo di un Newton per perfezionarla i più grandi Matematici di questo secolo, è ancora moltissimo lontana da quel grado di perfezione, in cui oggidì si ritrova l'Idrostatica. Peccato, che l'Idraulica sia così imperfetta! Essendo essa all'umana società di maggiore importanza, che l'Idrostatica, se ben si considera il bisogno pressochè continuo, che abbiamo, ora di distribuire le acque,

ora di condurle o per irrigare le campagne, o per farle zampillare nei giardini, o per impiegarle agli usi dei luoghi sprovvisti, ora di sollevarle dalle profondità, dove dalla natura sono esse state riposte, ora di dar loro il necessario scolo a benefizio dell' Agricoltura, e dell' Aria, ora di tenerle rinchiuse dentro i proprj alvei principalmente in tempo delle piene, ora di derivare o dai laghi, o dai fiumi canali navigabili a vantaggio del commercio, ora di calcolare gli effetti delle macchine mosse dall'acqua, ora finalmente di stabilire su principj sicuri la costruzione delle navi.

2. L'Idraulica ha per oggetto, siccome dissi, il moto dei corpi fluidi a differenza della Idrostatica, che ne considera il loro equilibrio. Però si definisce l'Idraulica *la scienza del moto dei corpi fluidi*, siccome appunto abbiamo definita l'Idrostatica *la scienza dell' equilibrio dei corpi fluidi*. Il moto nasce in un fluido ogni volta, che si toglie fra le di lui parti l'equilibrio. Allora le particelle, che sono più premute, si portano necessariamente, dove la pressione è minore, siccome richiede la loro estrema piccolezza, mobilità, e quasi nissuna coerenza. I fluidi possono essere o incompressibili, o elastici. Tra i primi si considera dagl' Idraulici principalmente l'acqua, la compressibilità della quale è sì piccola, che si può reputare in tutti gli usi dell' Idraulica come nulla; e tra i secondi l'aria,

essendo i movimenti di questi due fluidi quei, che più c' interessano per li bisogni della società. Nel resto tutto ciò, che si dimostra spezialmente del moto dell' acqua, si può anche applicare a quello degli altri fluidi incompressibili.

3. Mi pare di poter distribuire acconciamente l' Idraulica in sei libri. Nel 1.° tratto della velocità dell' acqua fluente dai fori dei vasi; nel 2.° della misura dell' acqua fluente dai fori dei vasi: nel 3.° della misura delle acque correnti negli alvei: nel 4.° delle acque zampillanti: nel 5.° dell' azione dei fluidi su i corpi solidi, e dei fenomeni, che quindi ne derivano: nel 6.° finalmente delle macchine Idrauliche, che servono alla elevazione dell' acqua. Quali sieno le materie di ciascun libro, e con quale sceltezza, ordine, ed amenità sieno esse trattate, si può bastevolmente raccogliere dalla semplice ispezione dell' Indice. Ma qui non debbo dissimulare, che non ho potuto nella Idraulica spingere la teoria del moto a quella generalità, alla quale ho portata quella delle pressioni dei fluidi nell' Idrostatica, ricercandosi nella prima a tal fine l' ajuto della più sublime Matematica, dalla quale secondo il disegno propostomi mi astegno, mentre nell' altra basta il soccorso della comune. Nel resto la generale teoria del moto de' fluidi è fondata su supposizioni quasi niente conformi alla esperienza, siccome si vedrà nel Capo, che siegue, e si può essa da chi ha le sufficienti co-

gnizioni di Matematica ſtudiare spezialmente nella Idrodinamica del Sig. Abate Boſſut della seconda edizione, e nei sublimi supplementi alla ſteſſa del noſtro immortale Calcolatore, vale a dire del P. D. Gregorio Fontana delle Scuole Pie. Anche senza la generalità della teoria ſi ha in queſta noſtra Idraulica, quanto ſi ricerca per ben conoscere il moto de' fluidi, e per sapersene ben approfittare a vantaggio della Fiſica, e della Società umana.

LIBRO I.

DELLA VELOCITA' DELL' ACQUA FLUENTE DAI FORI DEI VASI.

CAPO I.

Dei tentativi degl' Idraulici per discoprire la legge, secondo la quale si fa lo scolo dell' acqua dai fori dei vasi.

4. Quando lungo l'altezza di un vase pieno di acqua si aprono più fori, si osserva allora, che secondo la maggiore o minore distanza, ch'essi hanno dal livello, l'acqua vi esce con maggiore, o minore velocità. Questo fenomeno, quantunque sì ovvio, e conosciuto anche fin dai primi principj dell' Idraulica, siccome appare dal Commentario di Sesto Giulio Frontino *De aquaeductibus urbis Romae*, è rimasto sterile affatto, ed infecondo fino ai tempi dei due celebri discepoli dell' immortale Galileo, ossia di Benedetto Castelli, e di Evangelista Torricelli, senzachè

abbiano punto pensato gli uomini dediti allo ſtudio delle acque a rintracciare la legge, secondo cui, scendendo dalla superficie ſino al fondo del vase, ſi fa quell'acceleramento dell'acqua fluente. Nè ciò ci deve far maraviglia. Imperocchè gli antichi Idraulici non ſi sono accorti, che nella misura delle acque fluenti ſi doveſſe aver riguardo alla loro velocità. Infatti ſino a quei tempi le quantità dell'acqua fluente ſi misuravano soltanto dall'ampiezza del foro senza combinarvi inſieme l'elemento della velocità, ſiccome ſi fa anche ai noſtri giorni da' tanti Architetti ignoranti nel riparto delle acque.

5. Il primo, che avvertì gl'Idraulici, che nella misura dell'acqua fluente ſi avea d'aver riguardo anche alla velocità, fu il P. Abate Benedetto Caſtelli Monaco Benedettino nel suo libro *sulla misura delle acque correnti*. Ecco in qual modo scopre loro l'errore. „ Se noi c'immagineremo, dic'egli, che vengano cavate da' due fori eguali due corde eguali; ma che la prima esca con quadrupla velocità della seconda, è manifeſto, che, se in un determinato tempo avremo dal primo foro cavate quattro canne di corda, nel medeſimo tempo ſi sarà cavata dall'altro foro una canna di corda solamente; e se dal primo foro ne saranno cavate dodici canne, allora dal secondo foro saranno uscite solamente tre canne, e in somma qual proporzione avrà la velocità alla velocità, tale avrà la

quantità della corda alla corda: la qual cosa si verifica appunto nell' elemento fluido dell' acqua ec. ". Il P. Abate Castelli fu anche il primo, che seriamente si applicasse alla ricerca della legge, secondo la quale si accelera il moto dell' acqua fluente. Ma, credendo egli, che la velocità dei fluidi nella libera uscita dai fori fosse l' effetto totale della pressione, che le loro parti inferiori sostengono dalle superiori, ha stabilito, che quella dovesse crescere in proporzione del numero delle parti prementi, ossia in proporzione dell'altezza del fluido contenuto; nel che, come ben si vede, si è ingannato quell' uomo grande, essendo l'effetto totale della pressione la quantità del moto del fluido uscente dal foro, ossia la massa del fluido uscente moltiplicata nella sua velocità. Ond'è, che la velocità, che ha il fluido al suo sortire dal foro, è una parte soltanto dell' effetto, che produce la pressione del fluido superiore.

6. Dalla pressione del fluido superiore sull' inferiore poteva ben egli facilmente arrivare alla scoperta del rapporto, che avvi tra la velocità del fluido uscente, e l'altezza del fluido contenuto sopra il foro, quando questo è infinitamente piccolo rispetto all'ampiezza del vase, se avesse considerata la quantità del moto del fluido espulso dal foro, come effetto totale dell' altezza del fluido premente, siccome ha fatto molti anni dopo il Sig. Varignon nelle Memorie dell' Acca-

demia Reale di Parigi all' anno 1703. Infatti, chiamate A, a le altezze, che hanno due fluidi contenuti in due differenti vasi sopra i respettivi fori, M, m le masse dei fluidi espulse dai fori in tempi eguali, V, v le velocità di queste, poichè gli effetti sono accuratamente proporzionali alle loro cause, egli è chiaro, che starà $A : a = MV : mv$. Quindi, essendo nelle acque fluenti secondo lo stesso P. Abate Castelli le masse proporzionali alle velocità, ossia, essendo $M : m = V : v$, deve anche stare, fatta la sostituzione, $A : a = V^2 : v^2$, e perciò $\sqrt{A} : \sqrt{a} = V : v$, vale a dire le velocità delle acque fluenti dai fori dei vasi debbono essere in ragione subduplicata delle altezze dei fluidi contenuti. Ma certe piccole viste, che dopo le scoperte pajono facili, ed ovvie, ricercano avanti il maggiore sforzo dell' ingegno. L' Abate adunque Castelli, quantunque siasi col semplice suo raziocinio avvicinato alla scoperta della legge, secondo la quale si accelera il moto dei fluidi uscenti dai fori dei vasi, ha lasciato ciò non ostante tutto il merito dell' invenzione al celebre suo condiscepolo Evangelista Torricelli. Questi, che colla sua bella sperienza della sospensione del mercurio nel barometro ha dato il fondamento all'Aereometrìa, l'ha dato anche all'Idraulica mercè di una conseguenza, che seppe tirare da una ovvia osservazione. Onde si deve quell'illustre Italiano con tutta ragione considerare Padre sì dell'una, come anche dell'altra Scienza.

7. Avendo il Sig. Torricelli osservato, che, adattando al foro di un vaso pieno di acqua un piccol tubo drizzato all'insù, il getto, che vi esce, risale quasi alla stessa altezza della superficie dell'acqua contenuta, ne inferì giustamente, che il getto all'uscire del foro ha per l'appunto quello stesso grado di velocità, che l'acqua avrebbe acquistata, cadendo liberamente dalla quiete per uno spazio eguale alla altezza, che ha la superficie del fluido nel vase sopra il piano del foro salvo qualche piccolo divario, che si ascrive agl' impedimenti, ch' esso incontra nella sua ascesa, quali sono lo scambievole attrito delle particelle dell' acqua coll' orlo del tubo, la resistenza dell'aria, la caduta delle particelle superiori sulle inferiori del getto ec. Quindi in seguito di questa sua scoperta stabilì il rapporto, che passa tra le velocità dell'acqua fluente da diversi fori sotto diverse profondità, vale a dire essere queste fra loro in ragione subduplicata delle altezze respettive del fluido contenuto sopra i fori. Il primo, che con decisivi esperimenti confermò questo rapporto, fu Raffaele Maggiotti. La scoperta del Torricelli diede poscia occasione a varie opere sul movimento delle acque, tra le quali merita particolare riguardo il trattato del Sig. Mariotte, contenendo questo oltre molte sperienze degli ottimi precetti, che hanno contribuito all'avanzamento dell'Idraulica pratica.

8. Il Dottor Domenico Guglielmini non so-

lamente abbracciò la scoperta del Torricelli come conforme alla sperienza, ma eziandio l'applicò alle acque correnti prima nella sua opera, che pubblicò l'anno 1787., *della misura delle acque correnti*, e poscia nell'altra sua opera immortale, che diede alla luce l'anno 1697. in Bologna, della *natura de' Fiumi*, e che fu di poi ristampata l'anno 1739. colle esimie annotazioni del non men celebre Idraulico Eustachio Manfredi. L'applicazione, che fece il Guglielmini della scoperta del Torricelli al corso dei Fiumi, fu in seguito da tutti quasi gl'Idraulici abbracciata, indotti, credo, dalla grande analogìa, che passa tra l'acqua fluente dai fori dei vasi, e tra l'acqua corrente. „ Non v'ha fiume, dice il P. Abate Grandi nel c. 5. l. 2. *sul movimento delle acque*, non v'ha, dico, fiume, che non iscenda o da un lago, o da una fonte, o da qualche chiusa, o sostegno, e allora l'acqua raccolta nel ricettacolo della fonte, del lago, o dell'alveo superiore alla chiusa è, come se fosse raccolta in un vase, e l'acqua, che scorre nell'alveo susseguente, per l'emissario del lago, pel labbro della fonte, o per la cresta della chiusa scendendo, corrisponde a quella, che per le docce applicate a qualche vase si va derivando da un luogo ad un altro ". Molti han cercato di confermare la dottrina del Sig. Guglielmini intorno la misura delle acque correnti con varj esperimenti, fatti principalmente col mezzo della *fiasca idrometrica*, e del *quadrante a pen-*

dolo. Ma di questi esperimenti si avrà a suo luogo da discorrere.

9. La scoperta del Torricelli non ha luogo, se non quando il foro, donde sorte l'acqua, è piccolo rispetto all'ampiezza del vase, che la racchiude, seguendo negli altri casi la velocità dell'acqua fluente un'altra legge ben molto più composta. Quale adunque si è questa legge? „ I progressi dell'Idrodinamica, dice il Sig. Ab. Bossut, sono stati più lenti di quelli della Meccanica dei solidi. Prima del Sig. Daniele Bernoulli non si sapeva determinare con esattezza lo scolo dei fluidi per degli orifizj, che nel solo caso, in cui questi orifizj potevano esser riguardati come infinitamente piccoli; giacchè io non mi credo in dovere di parlare della Teoria generale, che Newton intraprese di dare intorno questo soggetto, perchè egli impiega delle supposizioni precarie, ed anche incompatibili colle leggi dell' Idrostatica. Il Sig. Bernoulli s'appoggia all'esperienza; suppone semplicemente, che la superficie di un fluido, che esce da un vase per un orifizio di grandezza qualunque, dimori sempre a livello, e che tutti i punti d'una stessa sezione s'abbassino verticalmente con delle velocità eguali: applica a quest' ipotesi il principio della conservazione delle forze vive, e giunge a delle formole rimarcabili per l'elevazione del calcolo, e la semplicità dei risultati. Giammai lo spirito d'invenzione, la Geometria, e la Fisica furono insieme

unite più vantaggiosamente. I Signori Maclaurin, e Giovanni Bernoulli trattarono le stesse questioni, o almeno le principali; adoperando però degli altri metodi. La scelta di questi metodi era fondata su dei motivi molto differenti. Maclaurin poneva il principio della conservazione delle forze vive nel numero delle verità secondarie, e non credeva, che la si potesse prendere per base di una soluzione: all'incontro Giovanni Bernoulli lo avea sempre riguardato come una legge fondamentale della Meccanica, e ne avea fatto uso per risolvere un gran numero di problemi; ma divenuto un poco geloso di suo figlio, dacchè l'Accademia delle Scienze avea diviso tra loro il premio dell'anno 1734., pretese, che questo principio era indiretto nella questione del moto dei fluidi. Quello del Sig. d'Alembert non temeva alcun rimprovero; e l'Autore dopo di averlo applicato ai più difficili problemi di Dinamica, ne dimostrò egualmente l'uso per determinare il moto dei fluidi. Fa le stesse supposizioni, che il Sig. Daniele Bernoulli, e perviene agli stessi risultati nel modo il più semplice ed il più diretto. Il suo metodo ha l'avvantaggio d'abbracciare tutti i casi, a luogo che la legge della conservazione delle forze vive soffre una restrizione, allorchè la velocità cangia bruscamente d'un istante all'altro, o quando vi è una percossa di un corpo duro ". Sono parole del suddetto Autore nel suo *Quadro dei progressi delle Matematiche*.

10. Ma per mal destino dell' Idraulica le ipotesi, su cui s' appoggiano le teorie di que' sublimi Matematici, sono quasi niente conformi alla sperienza. Due sono le loro ipotesi, siccome si raccoglie dalle parole del Sig. Abate Bossut. Nella 1.ª si suppone, che tutti gli strati orizzontali, nei quali si concepisce diviso il fluido contenuto, s' abbassino, mentre si vota il vase per il suo foro, sempre parallelamente a se stessi. Nella 2.ª, che tutte le particelle, dond' è composto lo stesso strato, abbiano una velocità eguale, e parallela all' asse del vase. Ora la prima supposizione non si verifica, se non quando il foro è molto piccolo rispetto all' ampiezza del vase, e quando l' altezza, che ha il fluido contenuto sopra il foro, è notabile: l' altra non può aver luogo, se non nei vasi prismatici, e verticali. Inoltre sì l' una, come l' altra supposizione non ha luogo in quelle particelle, che sono poco distanti dal foro, essendo dalla sperienza comprovato, che queste convergono tutte in tempo dello scolo al foro con moti diversamente obbliqui. Non dobbiamo però maravigliarci, se in tanta luce di Matematica non siasi ancora sciolto con esattezza quel problema, quantunque alla di lui soluzione vi si sieno messi con tutto lo studio i più grandi Matematici del nostro secolo. Imperocchè il problema è sì complicato, attese le quantità dei moti, delle direzioni e delle pressioni verso ogni parte, che

supera affatto le forze della Geometria, e del calcolo, ficcome saggiamente avverte il Sig. D. Paolo Frifi al c. IV. l. IV. delle sue *Inftituzioni di Meccanica, d' Idroftatica ec.* „ Generalmente parlando, dic' egli, la difficoltà di tutti i problemi cresce in proporzione del numero delle condizioni, e degli elementi, che vi entrano. Così i problemi Meccanici sono tanto più complicati, quant' è maggiore il numero dei corpi, de' quali fi cerca il moto, e che in qualunque maniera agiscono tra di loro. Ora in una maffa di fluido, che fi mova in qualfivoglia tubo, o canale, tutte le particelle agiscono insieme urtandofi, premendofi, e come porta la natura del fluido facendo paffare la preffione dall' una all' altra in qualunque senso, e all' infinito. Dunque il determinare la velocità, e il moto di ciascuna particella è un problema, che dipende da infinite equazioni, e che supera per conseguenza tutte le forze dell' Algebra ". Per buona sorte dell' Idraulica nell' impotenza, in cui ci troviamo di darle tutta la generalità, la scoperta del Torricelli bafta quafi sempre nella pratica, non facendofi quafi mai negli ufi ordinarj della vita gli scoli dei fluidi per fori molto grandi rispetto alle ampiezze dei vafi. Però, se fiamo saggi, dobbiam effer contenti di quella scoperta, procurando di derivare da effa la Scienza del moto delle acque, senzachè perdiamo il tempo in ricerche inutili, e spinose.

APPEN-

APPENDICE.

Della dottrina del moto uniformemente accelerato necessaria all' intelligenza del Capo, che siegue, e di molti altri dell' Idraulica.

11. Un corpo, che non ha ricevuto, che una sola impulsione, si muove sempre colla stessa velocità secondo la direzione della forza motrice, siccome c' insegnano le leggi del moto. Ma se la forza motrice agisce continuamente nello stesso corpo secondo la stessa direzione, dandogli continuamente, ossia ad ogni momento eguale di tempo una nuova impulsione, allora il mobile si move secondo la stessa direzione con velocità continuamente maggiore, ossia, come dicesi, *con moto accelerato*. La forza, che accelera il moto del mobile, può esser sempre intensivamente la stessa, dandogli sempre ad ogni momento eguale di tempo eguale impulso, e in questo caso la forza acceleratrice chiamasi *costante*, e il moto, che ne risulta nel mobile dalla sua sempre uguale azione, nominasi *uniformemente accelerato*. Tale appunto si è il moto dei gravi discendenti in un mezzo non resistente, essendo la gravità, che gli anima alla discesa, nelle distanze non molto grandi dalla superficie della Terra una forza acceleratrice costante, siccome consta dalla sperienza. Ecco le leggi principali del moto uniformemente accelera-

to, ossia dei gravi nelle loro libere cadute brevemente esposte.

TEOREMA.

Lo spazio, che descrive un corpo dentro un dato tempo con moto uniformemente accelerato, è uguale al prodotto della sua velocità finale nella metà del tempo.

12. Si concepisca diviso in parti infinitesime, ed uguali, ossia in momenti eguali il tempo, in cui dura l'azione della forza acceleratrice costante nel mobile A (fig. 1.). Si ponga poscia, che l'impulso, ch'essa gli dà nel 1.° momento, sia tale, che il mobile A percorra lo spazio A*a* colla velocità *v*. Se il mobile A giunto in *a* non ricevesse dalla forza acceleratrice più veruno impulso, esso si moverebbe secondo la direzione di A*a* sempre colla stessa velocità *v* acquistata, descrivendo in momenti eguali spazj sempre eguali ad A*a*. Ma la forza acceleratrice dà al mobile A giunto in *a* nel 2.° momento un impulso eguale al primo, essendo essa, siccome si suppone, costante. Quindi il mobile A deve nel 2.° momento percorrere lo spazio *ab* colla velocità 2*v*. Nello stesso modo dimostrerò, che il mobile A dovrà descrivere nel 3.°, nel 4.° ec. momento gli spazj *bc*, *cd* ec. colle velocità 3*v*, 4*v* ec.

Ora si dica t il tempo totale, in cui la forza acceleratrice costante agisce nel mobile A, s lo spazio descritto dal mobile A in questo tempo, c la velocità acquistata nel fine dello stesso, n finalmente il numero infinito dei momenti eguali, che si contengono nel tempo finito t. Egli è chiaro, che ciascun di questi momenti sarà $= \frac{t}{n}$, e quindi, poichè il moto del mobile A in ciascun di essi è uniforme, si avrà $Aa = \frac{vt}{n}$, $ab = \frac{2vt}{n}$, $bc = \frac{3vt}{n}$, $cd = \frac{4vt}{n}$, e così di seguito, essendo nel moto uniforme lo spazio eguale al prodotto della velocità nel tempo. Adunque si avrà $s = \frac{vt}{n} + \frac{2vt}{n} + \frac{3vt}{n} + \frac{4vt}{n}$ ec. $+ \frac{ct}{n}$.

I termini, che compongono il secondo membro della equazione, costituiscono una progressione infinita aritmetica, in cui il primo termine è $\frac{vt}{n}$, l'ultimo $\frac{ct}{n}$, il numero finalmente dei termini n. Però, essendo la somma dei termini di una progressione aritmetica, siccome si dimostra in Aritmetica, eguale alla somma degli estremi moltiplicata nella metà del numero di essi, dev' esser $s = \overline{\frac{vt}{n} + \frac{ct}{n}} . \frac{n}{2} = \frac{t}{2} . \overline{v + c}$, ossia,

potendosi trascurare senza pericolo di error sensibile la quantità infinitesima $v, = \frac{1}{2} ct$. Lo spazio adunque, che descrive un corpo dentro di un dato tempo con moto uniformemente accelerato, è uguale al prodotto della sua velocità finale nella metà del tempo. Ciocchè ec.

13. *Scolio*. Dalla dimostrazione addotta consta, che nel moto uniformemente accelerato le velocità acquistate sono proporzionali ai tempi, essendo la velocità del mobile A nel 1.° momento $= v$, nei primi due momenti $= 2v$, nei primi tre $= 3v$, nei primi quattro $= 4v$, finalmente in un numero infinito n di momenti, ossia in un tempo finito $= nv$.

14. *Coroll.* I. Lo spazio descritto dal mobile A in un dato tempo con moto uniformemente accelerato è la metà di quello, che lo stesso mobile avrebbe descritto nello stesso tempo, movendosi uniformemente colla sua velocità finale. Imperocchè lo spazio descitto dal mobile nel tempo t con moto uniformemente accelerato è, siccome abbiamo dimostrato, $= \frac{1}{2} ct$, mentre lo spazio, che lo stesso mobile avrebbe descritto nello stesso tempo t, movendosi uniformemente colla sua velocità finale c, si è $= ct$.

15. *Coroll.* II. Gli spazj S, s, che con moto uniformemente accelerato descrivono i mobili A, a nei tempi T, t, se si computano dal loro principio, sono come i quadrati dei tempi. Imperoc-

chè essendo $S = \frac{CT}{2}, s = \frac{ct}{2}$ (12.), deve stare

$S : s = \frac{CT}{2} : \frac{ct}{2} = CT : ct$, ossia, poichè nel

moto uniformemente accelerato le velocità acquistate sono proporzionali ai tempi impiegati (13.), messa la ragione $T : t$ al luogo dell'altra eguale $C : c$, dev'esser $S : s = T^2 : t^2$. Nello stesso modo si dimostra, che nel moto uniformemente accelerato gli spazj descritti sono come i quadrati delle velocità finali. Quindi, poichè non si muta la proporzionalità di quattro termini, estraendo da ciascuno la radice quadrata, le velocità finali, oppure i tempi debbono essere nel moto uniformemente accelerato come le radici degli spazj descritti. Quindi anche, poichè gli spazj descritti in uno, in due, in tre, in quattro ec. secondi, ossia in tempi finiti, ed eguali presi di seguito sono come 1, 4, 9, 16 ec., facilmente s'intende, che, presi gli spazj descritti in tempi separati, vale a dire nel 1.°, nel 2.°, nel 3.° ec. secondo, debbono questi crescere secondo i numeri dispari naturali 1, 3, 5, 7 ec. essendo lo spazio descritto nel 1.° secondo $= 1$, nel 2.° eguale allo spazio descritto nei due primi secondi meno quello stato descritto nel 1.°, ossia $= 4 - 1 = 3$, nel 3.° eguale allo spazio descritto nei primi tre secondi meno quello stato descritto nei primi due, cioè $= 9 - 4 = 5$, nel 4.° eguale allo spazio

descritto nei primi quattro secondi meno quello ſtato descritto nei primi tre, cioè $= 16 - 9 = 7$, e così di seguito.

16. *Coroll.* III. Gli spazj S, s, che i mobili A, a sollecitati alla discesa dalle forze acceleratrici coſtanti F, f descrivono nei tempi T, t, sono in ragione compoſta delle forze acceleratrici, e dei quadrati dei tempi. Imperocchè, poſte uguali le forze acceleratrici F, f, gli spazj debbono eſſere come i quadrati de' tempi, oſſia deve ſtare $S : s = T^2 : t^2$ (15.). Similmente, poſti eguali i tempi T, t, gli spazj debbono eſſere tanto maggiori, quanto maggiori sono le forze acceleratrici, oſſia deve ſtare $S : s = F : f$, essendo egli chiaro, che quanto maggiore ſi è la forza acceleratrice F della forza acceleratrice f, altrettanto maggiore dev' eſſere dentro lo ſteſſo tempo la discesa del mobile A della discesa del mobile a. Quindi, poſte disuguali le forze acceleratrici, e i tempi, gli spazj debbono eſſere in ragione compoſta delle forze acceleratrici, e dei quadrati dei tempi, oſſia dev' eſſere $S : s = FT^2 : ft^2$. Onde anche, poichè le velocità finali acquiſtate nella discesa dei mobili A, a sono proporzionali ai tempi, gli spazj debbono eſſere in ragione compoſta delle forze acceleratrici, e dei quadrati delle velocità finali, oſſia dev' eſſere $S : s = FC^2 : fc^2$.

17. *Scolio*. Se il corpo A dopo di eſſer disceso con moto uniformemente accelerato dall'

altezza A *d* verrà rispinto all' ascesa secondo la direzione contraria *d* A colla velocità iniziale eguale a quella, ch' esso ha acquistata nella sua discesa dall' altezza A *d*, e se nell' ascendere proverà l'azione di una forza retardatrice eguale a quella, che nel discendere ha accelerato uniformemente il suo moto, siccome appunto succede ai gravi, allorchè questi vengono obbligati all' ascesa, dovrà esso ascendere con moto uniformemente ritardato fino al punto A, dal quale è disceso, impiegando nell' ascesa lo stesso tempo, che ha impiegato nella discesa. Nè v' ha maraviglia. La forza ritardatrice deve nell' ascesa levare successivamente al corpo A gli stessi gradi di velocità, che gli ha comunicati nella discesa la forza acceleratrice, essendo l' una, siccome si suppone, eguale all' altra.

CAPO II.

Della legge, secondo la quale si fa lo scolo dell' acqua dai piccoli fori dei vasi.

18. Poichè l' acqua, mentre sorte da un piccol foro scolpito nel fondo, oppure in uno dei lati del vase, ha quella stessa velocità, che avrebbe acquistata, cadendo liberamente in vigore della sua gravità dalla superficie fino al foro, siccome ha scoperto il Sig. Torricelli, han creduto

i Filosofi sul principio, che l'acqua in tanto avesse al suo sortire dal foro una sì fatta velocità, in quanto fosse realmente caduta da quell'altezza con moto uniformemente accelerato, formando nella sua discesa per mezzo l'acqua del vase, siccome pensa il Sig. Newton nella proposizione 36.ª del lib. II. dei *Principj della Filosofia naturale*, una figura ad imbuto, ch'esso chiama *cateratta*, e che, come asserisce il Sig. Eustachio Manfredi nella annotazione 3.ª al capo 1.° della *Natura de' Fiumi*, già era stata indicata dal Sig. Guglielmini nel lib. 4.° prop. 6.ª, e geometricamente determinata nel lib. 5.° prop. 9.ª della *Misura delle acque correnti*. Ma fatta poscia riflessione sulla insussistenza di quella opinione, essendo egli chiaro, che le particelle, dalle quali è composta la suprema superficie dell'acqua nel vase, non possono scendere al foro in quel tempo sì breve, e quasi istantaneo, in cui l'acqua sorte, mentre si apre il foro, con quella velocità, che corrisponde all'altezza del fluido contenuto; nè eziandio possono, discendendo, acquistare sì fatta velocità, attesi i tanti impedimenti, che si oppongono alla loro libera caduta dalle altre particelle laterali, che fanno anch'esse sforzo per sortire dal foro, hanno eglino considerato come causa della velocità dell'acqua fluente la pressione delle sue parti superiori. Il Sig. Varignon è stato il primo a servirsi di questa pressione per dimostrare la legge, secondo la

quale si accelera il moto dell' acqua uscente. Ma in questa sua dimostrazione egli non ha considerata la grandezza del foro come infinitamente piccola rispetto all' ampiezza del vase; nel che ha sbagliato quell' uomo grande. Inoltre non ha dimostrato, se non il rapporto, che passa tra la velocità dell' acqua fluente, e l' altezza della stess' acqua contenuta al di su del foro (6.), senza punto dimostrare, che la quantità assoluta della velocità fosse quella stessa, che acquisterebbe un grave, discendendo liberamente in vigore della sua gravità da quell' altezza. Nondimeno la dimostrazione del Varignon, quantunque così imperfetta, è stata poscia adottata dall' Ermanno, dal Grandi, e da molti altri. Ecco come procediamo noi, servendoci della pressione del fluido superiore, alla rigorosa dimostrazione della scoperta del Sig. Evangelista Torricelli.

TEOREMA I.

Siavi il vase ACDB (fig. 2.) *pieno di acqua, e, fatto nel suo fondo orizzontale* CD *il foro* MN *infinitamente piccolo rapporto alla di lui ampiezza, se ne permetta lo scolo. Dico, che la velocità dell' acqua, che in tempo dello scolo discende dentro il vase, è infinitamente piccola rispetto alla velocità dell' acqua, ch' esce dal foro.*

19. Si supponga, che dal foro MN sorta il piccol prisma MmnN nel momento di tempo, che la superficie AB dell'acqua discende in ab. Egli è chiaro, che il volume del prisma MmnN dev'essere eguale a quello del prisma AabB. Quindi è, che, essendo il volume di $AabB = AB.Aa$, e quello di $MmnN = MN.Mm$, dev'essere $AB.Aa = MN.Mm$; e perciò anche $Aa : Mm = MN : AB.Ma$, poichè MN si suppone infinitamente piccola rispetto ad AB, anche Aa, attesa la natura della proporzione, dev'essere infinitamente piccola rispetto Mm. Ora Aa, Mm dinotano le velocità dell'acqua posta nelle sezioni AB, MN, abbassandosi la sezione AB in ab nello stesso momento di tempo, che la sezione MN s'abbassa in mn. La velocità adunque dell'acqua, che nel tempo dello scolo discende dentro il vase ACDB, è infinitamente piccola riguardo a quella dell'acqua, che sorte dal foro MN. Ciocchè ec.

20. *Coroll.* Poichè la velocità dell'acqua, che discende dentro di un vase in tempo dello scolo, è infinitamente piccola rispetto a quella dell'acqua, che sorte dal di lui foro infinitesimo, si può essa considerare senza error sensibile come nulla, e considerare quindi il fluido contenuto, come sensibilmente stagnante in tutto il tempo dello scolo.

21. *Scolio.* Se il foro MN è finito rispetto

all' ampiezza dal vase ACDB, non si può più considerare come stagnante il fluido contenuto, essendo in questo caso finita la ragione di MN: AB, e perciò anche quella di Aa: Mm, ossia della velocità dell' acqua discendente dentro il vase alla velocità dell' acqua fluente dal foro. Ma, quantunque sia finita la velocità dell' acqua discendente dentro il vase, allorchè finito si è il foro MN, essa è però minore di quella, che avrebbe, se in vigore della sua gravità liberamente discendesse, nè la prima diventa eguale alla seconda, se non nel solo, ed unico caso, in cui, posto il vase prismatico, e verticale, il foro è infinitamente grande, ossia eguale alla larghezza del vase. Si concepisca il fluido, che si contiene nel vase ACDB, diviso in un numero infinito di sezioni eguali, infinitesime, ed orizzontali. Ciascun vede, che, posto il foro MN eguale alla larghezza CD del vase, deve la velocità della discesa di ciascuna sezione essere eguale a quella della sezione superiore AB. Infatti, essendo Aa: Mm = MN: AB, ossia, poichè si suppone MN eguale a CD, = CD: AB, deve per l' eguaglianza delle due sezioni CD, AB esser Aa = Mm, cioè deve la velocità della discesa della sezione AB essere eguale a quella della discesa della sezione CD. Si prenda ora la sezione EF, e si ponga, che questa s' abbassi in Ee nello stesso tempo, che la superficie AB discende in Aa. Egli è chiaro, che starà Aa:

$Ee = EF : AB$. Però, essendo $EF = AB$, anche Aa dev' esser $= Ee$, ossia deve la velocità della discesa della sezione AB essere eguale alla velocità della discesa della sezione EF. Nello stesso modo dimostrerò, che anche la velocità della discesa delle altre sezioni è uguale a quella della discesa della sezione AB. Onde poichè questa prima sezione discende unicamente in vigore di quella velocità, che le imprime la propria gravità, anche le altre sezioni debbono discendere con quella sola velocità, che loro imprime la propria gravità. Dal fin quì detto si vede

I. Che, quando in un vase prismatico il foro è infinitamente grande, ossia eguale alla di lui larghezza, la gravità di ciascuna sezione è affatto libera: quand'è infinitamente piccolo, essa è totalmente impedita, ossia sostenuta: quando finalmente non è infinitamente grande, nè infinitamente piccolo, ossia quand'è finito, essa è in parte libera, ed in parte sostenuta.

II. Che nel 1.° caso le particelle inferiori del fluido non sono premute all'ingiù dalle superiori: nel 2.° sono premute totalmente: nel 3.° solamente in parte.

III. Che finalmente nel 1.° caso la velocità dello scolo dev'esser l'effetto soltanto della libera gravità del fluido: nel 2.° l'effetto della gravità sostenuta del fluido superiore: nel 3.° finalmente l'effetto della gravità in parte libera, ed in parte

sostenuta. Ma in quest'ultimo caso la natura della stessa fluidità apporta non piccole variazioni al moto dell'acqua fluente, principalmente se si considera il fluido posto all'intorno del foro, siccome presto si vedrà.

TEOREMA II.

Sia q M N p *la falda, che in un tempo infinitesimo esce intieramente dal foro* M N *infinitesimo rispetto all'ampiezza del vase* ACDB *pieno di acqua. Dico, che in tutto quel tempo viene essa dal fluido contenuto premuta continuamente fuori del vase con forza eguale al peso della colonna d'acqua* RMNS, *che dalla superficie dell'acqua nel vase insiste perpendicolarmente sul foro* M N.

22. Si supponga il foro M N chiuso. Essendo il fluido, siccome si suppone, stagnante, la falda, *q* M N *p*, che cuopre esattamente il foro M N, verrà all'ingiù premuta e dal proprio peso, e dal peso della colonna sopraincumbente R *q p* S, ossia dal peso della colonna R M N S, che dalla superficie del fluido contenuto insiste sul foro M N. Si ponga ora il foro M N aperto. Egli è chiaro, che, non distaccandosi la falda *q* M N *p* dalla colonna R *q p* S in tutto il tempo infinitesimo, ch'essa mette ad uscire intieramente dal foro

MN, se non per lo spazio infinitesimo qM, si può essa considerare in tutto quel tempo come sensibilmente congiunta. Quindi è, che, restando in tutto quel tempo, quantunque sia aperto il foro infinitesimo MN, il fluido nel vase ACDB sensibilmente stagnante, deve la falda $qMNp$ in tutto quel tempo esser premuta all' ingiù e dal proprio peso, e dal peso della colonna sopraincumbente $RqpS$, ossia dal peso della colonna RMNS. La falda dunque $qMNp$ in tutto il tempo infinitesimo, ch'essa mette ad uscire intieramente dal foro MN, viene dal fluido contenuto continuamente premuta fuori del vase con forza eguale al peso della colonna d' acqua RMNS, che dalla superficie dell' acqua nel vase insiste perpendicolarmente sul foro MN. Ciocchè ec.

23. *Scolio*. Il teorema ha luogo anche quando il foro è scolpito in uno dei lati del vase, purchè esso sia infinitamente piccolo rispetto all' ampiezza del vase. Imperocchè, esercitando i fluidi stagnanti la loro pressione non solamente all' ingiù, ma eziandio verso qualunque altra parte, ben si vede, che, aperto (fig. 3.) nel lato BD del vase ACDB il foro Dd infinitesimo sì riguardo alla larghezza, come anche all' altezza del vase, la falda $Ddbc$, che vi si affaccia, deve in tutto il tempo infinitesimo, ch' essa mette a percorrere uno spazio eguale alla sua altezza CD, ossia a sortire intieramente dal foro, essere spremuta fuori del vase continuamente dal fluido contenuto con

forza eguale al peso di una colonna del medesimo fluido, la quale abbia per base il foro D*d*, e per altezza l'altezza del fluido contenuto sopra il foro. Quest' è sensibilmente uguale alla retta DB, essendo i punti D, *d* del foro infinitamente vicini fra loro; e perciò presa la falda *q*MN*p* simile, ed eguale alla falda D*dbc*, che si affaccia al foro D*d*, il peso della colonna fluida, che spreme la falda D*dbc* continuamente fuori del vase, dev'essere eguale a quello della colonna RMNS dello stesso fluido.

24. *Coroll.* I. La falda *q*MN*p* (fig. 2.) esce dal foro MN infinitesimo con moto uniformemente accelerato, venendo essa in tutto il tempo infinitesimo, che mette a sortire intieramente dal foro, continuamente premuta all'ingiù dal fluido contenuto colla stessa forza eguale al peso della colonna d'acqua RMNS.

25. *Coroll.* II. Tutta l'accelerazione, che soffre la falda *q*MN*p* nella sua discesa, si compie dentro il tempo infinitesimo, in cui essa sorte intieramente dal foro, essendo egli chiaro, che la falda *q*MN*p*, avantichè incominci ad uscire, non discende, tostochè è uscita tutta dal foro, non è più sottoposta alla pressione del fluido contenuto nel vase ACDB.

TEOREMA III.

La velocità, che acquista la falda q M N p *nel tempo infinitesimo, in cui esce intieramente dal foro* M N, *è uguale a quella, che acquisterebbe un grave, cadendo in vigore della propria gravità liberamente dalla suprema superficie* A B *del fluido contenuto fino al foro* M N.

26. Quando le forze acceleratrici costanti agiscono nella stessa massa, l'effetto, ch'esse allora producono in un certo tempo, non è altro, che una certa velocità. Quindi, poichè l'effetto, siccome ciascun sa, è in ragion composta dell'intensità della forza, e del tempo, in cui dura la di lei azione, dev'esser la velocità C prodotta dalla forza F nel tempo T, deve, dico, $C = FT$; e perciò $T = \frac{C}{F}$. Ora si prenda la equazione $S = FT^2$ (16.): poichè $T^2 = \frac{C^2}{F^2}$, si avrà, fatta la sostituzione, $S = \frac{FC^2}{F^2}$; e quindi $C^2 = FS$.

Ora si cerchi col mezzo di quest'ultima equazione

I. La velocità C, che ha la falda $qMNp$, tostochè intieramente è uscita dal foro M N. Si troverà $C^2 = RM . MN . g . qM$, essendo la forza accele-

acceleratrice costante F, che continuamente spreme fuori del vase la falda $qMNp$, $= RM.MN.g$ (22.), dove g esprime la gravità specifica del fluido contenuto nel vase, ed essendo lo spazio S, che descrive la stessa falda, mentre sorte intieramente dal foro MN, $= qM$.

II. La velocità c, che acquisterebbe la stessa falda $qMNp$, se in vigore del suo peso cadesse liberamente dalla suprema superficie AB del fluido contenuto fino al foro MN. Si troverà $c^2 = qM.MN.g.RM$, essendo la forza f, che ne accelera continuamente la discesa della falda $qMNp$, $= qM.MN.g$, siccome si suppone, ed essendo lo spazio s, che la stessa falda descrive nella sua discesa, $= RM$, siccome ancora si suppone.

Ora si confronti l'una coll'altra velocità, ossia si faccia $C^2 : c^2 = RM.MN.g.qM : qM.MN.g.RM$. Essendo i termini della seconda ragione di questa proporzione eguali, debbono anche i termini della prima, attesa la natura della proporzione, essere eguali, ossia dev'esser $C^2 = c^2$, e però anche $C = c$. Adunque la velocità, che ha la falda $qMNp$, tostochè è uscita intieramente dal foro MN del vase ACDB, è uguale a quella, che acquisterebbe la stessa, ossia, ch'è lo stesso, un grave cadendo liberamente dalla suprema superficie AB del fluido contenuto fino al foro MN. Ciocchè ec.

27. *Scolio*. Non ci deve far maraviglia, che la falda $qMNp$ acquisti in un tempo infini-

tesimo una velocità finita. Imperocchè s'essa fosse animata alla discesa soltanto dal proprio peso, non acquisterebbe in un tempo infinitesimo, se non una velocità infinitesima. Ma la falda $qMNp$ viene continuamente spinta alla discesa dal peso della colonna verticale RMNS, il qual è infinitamente maggiore del suo peso. Ond'è, ch'essa acquista in un tempo infinitesimo una velocità finita.

28. *Coroll.* I. Poichè la falda $Ddbc$ (fig. 3.), che cuopre il foro infinitesimo Dd, scolpito nel lato BD del vase ACDB, viene dal fluido contenuto spremuta continuamente fuori con forza eguale al peso di una colonna del medesimo fluido, la quale abbia per base il foro Dd, e per altezza l'altezza BD del fluido rinchiuso sopra il foro, anche la sua velocità dev'essere eguale a quella, che acquisterebbe un grave, cadendo liberamente in vigore della sua gravità dall'altezza BD. Onde se in pari distanza dalla suprema superficie AB del fluido contenuto si apriranno due fori infinitesimi Dd, MN, il primo nel lato BD, l'altro nel fondo CD, la velocità dell'acqua fluente sarà in ciascun foro eguale.

29. *Coroll.* II. Il fluido, tostochè è sortito dal foro MN, oppure dal foro laterale Dd, ha una velocità capace di farlo salire fino alla suprema superficie AB del fluido contenuto, essendo la velocità, che acquista un grave in fine di sì fatta discesa, capace di farlo salire fino a quell'altezza (17.).

30. *Coroll.* III. Se la velocità, che ha il fluido al suo sortire dal foro, si conservasse sempre la stessa, esso descriverebbe uno spazio = 2 B D nello stesso tempo, che un grave, cadendo liberamente, descrive lo spazio BD, avendo noi dimostrato (14.), che se un grave dopo esser caduto dall'altezza B D si movesse uniformemente colla velocità acquistata in fine della sua discesa, percorrerebbe lo spazio = 2 B D nello stesso tempo, che ha messo nella sua discesa. Quindi, applicato al foro D*d* orizzontalmente un tubo dello stesso diametro del foro, ed interiormente sì liscio, che, passandovi dentro il fluido, non patisca verun sensibile sfregamento, la falda D*dbc*, tostochè sarà intieramente uscita dal foro, D*d*, ossia, presa D*e* = D*c*, tostochè sarà giunta al luogo di D*esd*, si moverà lungo il tubo uniformemente, descrivendo colla sua uniforme velocità uno spazio = 2 B D nello stesso tempo, che metterebbe un grave a cadere dall'altezza B D del fluido contenuto.

31. *Scolio*. Il teorema si verifica in pratica anche, quando il foro è finito, purchè sia piccolo rispetto alla larghezza del vase, ossia purchè la sua superficie non sia maggiore di $\frac{1}{20}$ di quella del fondo. In questo caso però la velocità dell'acqua fluente non viene tutta, quant'essa è, prodotta dalla pressione della colonna superiore RMNS (fig. 2.). Imperocchè allorquando il foro è finito rapporto alla larghezza del vase ACDB, la falda

q M N *p* non viene intieramente, ma soltanto in parte premuta all'ingiù dal fluido superiore (21.). Da chi dunque la falda riceve una sì fatta velocità? La riceve, rispondo, in parte dall'azione del fluido superiore, che le stà sopra, in parte dall'azione del fluido, che le stà ai lati. Scemandosi la pressione, che la falda *q*M N*p* sostiene dalla colonna R M N S all'ingiù, devesi anche nella stessa proporzione scemare la pressione, che la stessa falda esercita contro il fluido, che stà ai di lei lati. Ond'è, che, questo fluido non ritrovando dalla parte della falda *q*M N*p* una resistenza eguale alla sua pressione laterale, tolto il primiero equilibrio, deve tendere al foro, dove la resistenza è minore, e mediante questa sua tendenza spremere fuori del vase la falda. Ora si concepisce, senzachè sia possibile il darne un' esatta dimostrazione, che si posson fra loro talmente combinare le azioni sì del fluido superiore, come anche del laterale, che la falda *q*M N*p* acquisti nel tempo del suo scolo quella stessa velocità, che avrebbe acquistata, se in quel tempo fosse stata continuamente premuta dal solo peso della colonna superiore R M N S. Nel resto la sperienza, siccome già dissi, ci accerta, che la cosa va così appunto. Ella solamente ci avverte, che, quando il foro è un po' grande, se si conserva il vase A C D B costantemente pieno, infondendovi dall'alto leggiermente tant'acqua, quanta ne dispensa il foro M N, la velocità dello scolo

non acquista la sua pienezza uniforme, e permanente, se non dopo un certo tempo. Imperocchè si osserva allora, che la quantità dell'acqua fluente nei primi tre, o quattro secondi è un po' minore di quella, che sorte dallo stesso foro nei tre, o quattro seguenti. Questa disuguaglianza si fa più sensibile, quanto più grande si è il foro.

PROBLEMA.

Ritrovare il rapporto, che passa tra le velocità di due fluidi all'uscire dai fori, e le altezze dei vasi, dove sono essi contenuti.

32. Sienvi due vasi V, v pieni ambedue o dello stesso fluido, oppure, di differenti fluidi, le altezze di questi sopra i respettivi fori si dicano A, a, le loro velocità finalmente al sortire dai fori si chiamino C, c. Poichè la celerità del fluido, che sorte dal foro del vase V, è uguale a quella, che ha un grave in fine della sua libera discesa dall'altezza A, sarà $C = \sqrt{A}$, essendo la velocità acquistata da un grave in fine della sua discesa come la radice dello spazio percorso nella discesa (15.). Per la stessa ragione dev'essere anche $c = \sqrt{a}$. Si ha dunque $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$, ossia le velocità di due fluidi, ch'escono dai fori dei loro respettivi vasi, sono fra loro in ragione delle radici delle loro altezze sopra i fori. Ciocchè ec.

33. *Coroll.* I. Se a diverse distanze dalla superficie dell'acqua contenuta si apriranno più fori, le velocità dell'acqua fluente saranno in ragione delle radici delle distanze dei fori dalla superficie del fluido contenuto. Quindi se si descriverà intorno l'altezza O*d* del fluido nel vase ADCB (fig. 4.), come intorno di un'asse la parabola O*d*Z con un parametro qualunque OL, condotte dai punti N, M, *d* dell'asse *d*O le ordinate N*n*, M*m*, *d*Z le velocità dell'acqua fluente dai punti N, M, *d* come da piccoli fori sotto le respettive profondità NO, MO, *d*O saranno proporzionali alle ordinate N*n*, M*m*, *d*Z, essendo per la natura della parabola le ordinate N*n*, M*m*, *d*Z come le radici delle corrispondenti ascisse NO, MO, *d*O. Questa figura mistilinea O*d*Z, in cui le ascisse esprimono le profondità, e le ordinate i rapporti delle velocità, ossia le velocità relative dell'acqua fluente convenienti a quelle profondità, si chiama *la scala delle velocità relative dell'acqua fluente*.

34. *Scolio*. Le proprietà della parabola, che hanno maggior uso nell'Idraulica, sono due. La 1.ª si è, che in ogni parabola havvi una linea OL, che chiamasi *parametro*, e ch'è terza proporzionale dopo l'ascissa NO, e la sua corrispondente N*n*. Quindi è, che il quadrato dell'ordinata N*n* è uguale al prodotto dell'ascissa NO nel parametro OL. Mutato il parametro si mutan tutte le ordinate corrispondenti alle stesse ascisse,

cosicchè con parametri maggiori la parabola diventa più larga. La seconda si è la sua quadratura. Archimede scoprì, che l'area chiusa tra l'ascissa, l'ordinata, e l'arco è uguale a due terzi del prodotto dell'ascissa nell'ordinata corrispondente. Così l'area $OnN = \frac{2 NO . Nn}{3}$. Però l'area del segmento parabolico $dNnZ = \frac{2 dO . dZ}{3} - \frac{2 NO . Nn}{3}$.

35. *Coroll.* II. Affine di obbligar l'acqua, che sorte da un foro con una data velocità, ad uscire con velocità doppia, tripla, quadrupla ec. bisogna render l'altezza del fluido sopra il foro 4, 9, 16 ec. volte maggiore, essendo le radici dei numeri 4, 9, 16 ec., alle quali sono proporzionali le velocità dell'acqua fluente 2, 3, 4 ec.

36. *Coroll.* III. Poichè le velocità dei fluidi uscenti dai fori, qualunque sia la loro specie, sono come le radici delle loro altezze sopra i fori, merita di esser corretto l'errore di quegl'Idraulici, che insegnano, essere le velocità di due fluidi di diversa specie, del mercurio per esempio, e dell'acqua al sortire dai loro fori respettivi in ragione subduplicata dei prodotti delle altezze nelle respettive gravità specifiche.

37. *Scolio*. Ma come può essere, mi si dirà, che la velocità dello scolo sia la stessa, ossia pieno il vase ACDB di mercurio (fig. 2.), o di acqua, essendo nel 1.° caso il peso della

colonna RMNS, dal quale è spremuta fuori la falda $qMNp$, quattordici volte maggiore, che nel 2.°. Ecco la ragione, rispondo. L'effetto totale della pressione non è la sola velocità, ma bensì, siccome abbiamo già avvertito, la quantità del moto, la quale si è come il prodotto della massa nella velocità. Quindi è, che, essendo la pressione della colonna RMNS di mercurio quattordici volte maggiore di quella, che sarebbe la stessa colonna, se fosse di acqua, la quantità del moto prodotto nella falda $qMNp$ di mercurio dev'esser quattordici volte maggiore di quella, che avrebbe la stessa falda, se fosse di acqua. La cosa va così appunto, quantunque la velocità sia in ambedue i casi la stessa, essendo la massa della falda $qMNp$ di mercurio quattordici volte maggiore di quella, che la stessa avrebbe, se fosse di acqua. Si vede adunque, che il maggior peso della colonna RMNS serve soltanto a spremere fuori del vase dentro lo stesso tempo maggior quantità di materia, senzachè punto s'accresca la velocità della materia espulsa. Generalmente parlando: quando le forze motrici sono proporzionali alle masse, ch'esse mettono in moto, le celerità sono sempre eguali.

CAPO III.

Della misura sì della velocità, come anche della forza dell' acqua fluente dai piccoli fori dei vasi.

38. Fin quì abbiam trattato dei rapporti delle velocità dei fluidi uscenti dai piccoli fori dei vasi, dove sono contenuti. Ora ci resta di ritrovare la misura delle loro velocità. Questa si ha, ogni qual volta si sa lo spazio, ch' essi percorrerebbero in un dato tempo, per esempio, in un secondo, movendosi uniformemente con quella velocità, che hanno al sortire dai fori dei loro vasi. La velocità dei fluidi uscenti così misurata per distinguerla dalla relativa si chiama *assoluta*.

PROBLEMA I.

Data l'altezza del fluido contenuto sopra il foro, ritrovare la di lui velocità assoluta al sortire dal foro.

39. Poichè la velocità, che ha il fluido al sortire dal foro, è uguale a quella, che acquisterebbe un grave, cadendo liberamente dall' altezza della superficie sopra il foro, egli è chiaro, che si troverà la di lui velocità assoluta ricercando

la misura della velocità acquiſtata da un grave in fine della sua libera discesa da quell' altezza. Si ponga dunque l'altezza del fluido contenuto sopra il foro $= a$, il tempo, che impiegherebbe un grave discendendo da queſt' altezza, $= t$, la velocità finalmente acquiſtata in fine della discesa $= v$. Eſſendo nella discesa dei gravi lo spazio descritto eguale alla metà del prodotto della velocità acquiſtata nel tempo impiegato (12.), sarà $a = \frac{1}{2} v t$. Per ritrovare il valore di t ſi ponga g la velocità, che acquiſta un grave in fine di un secondo, cadendo liberamente. Poichè nella discesa dei gravi i tempi sono come le velocità acquiſtate, ſi troverà il valore di t col fare queſta proporzione: un secondo al numero dei secondi, che ſi contengono in t, come la velocità acquiſtata da un grave in fine di un secondo alla velocità acquiſtata dallo ſteſſo in fine del tempo t, oſſia $1 : t = g : v$; e quindi sarà $t = \frac{v}{g}$. Meſſo adunque nella equazione di sopra il valore ritrovato di t, ſi avrà $a = \frac{v^2}{2g}$; e perciò $v = \sqrt{a \cdot 2g}$.

Ora ſi sa, che un grave, cadendo liberamente percorre in un secondo $15 + \frac{1}{12}$ piedi, oſſia 181. pollici parigini. Se in queſto secondo aveſſe avuta il grave coſtantemente la velocità finale g, avrebbe descritto uno spazio doppio

(14.), ossia 362. pollici. Si vede adunque, che la velocità g, acquistata da un grave in un secondo della sua discesa, è tale, che fa ad un corpo percorrere equabilmente 362. pollici per ogni secondo. Onde, poichè nella equazione $v = \sqrt{a \cdot 2g}$ il valore di a è dato, siccome si suppone, quello di $2g = 724$ poll., dev' esser noto anche il valore di v, ossia dev' esser nota la velocità assoluta dell' acqua fluente in un secondo sotto la data altezza. Ciocchè ec.

40. *Coroll.* I. Se si descriverà intorno l'altezza dO (fig. 4.) del fluido contenuto nel vase ADCB, come intorno di un' asse, col parametro OL della lunghezza $= 2g$ la parabola OdZ, le ordinate Nn, Mm, dZ esprimeranno le velocità assolute, ossia gli spazj, che in un secondo descriverebbe l'acqua fluente, movendosi equabilmente colla velocità, ch' essa ha al sortire dai punti N, M, d, come da tanti piccoli fori sotto le profondità NO, MO, dO. Imperocchè, essendo nella parabola il quadrato dell' ordinata eguale al prodotto dell'ascissa nel parametro (34.), dev' esser $Nn^2 = NO \cdot OL$, e però $Nn = \sqrt{NO \cdot OL}$, ossia, chiamata a l' altezza dell'acqua nel vase sopra il punto N, $= \sqrt{a \cdot 2g}$, eguale cioè alla velocità assoluta dell' acqua al sortire dal punto N. Questa figura mistilinea, in cui le ascisse esprimono le profondità, e le ordinate le velocità assolute dell' acqua fluente cor-

rispondenti a quelle profondità, si chiama *la scala delle velocità assolute dell' acqua fluente*.

41. *Coroll.* II. Si ponga l'altezza dell'acqua nel vase $=$ 100 piedi $=$ 14400 linee. Si cerchi poscia col mezzo dell' equazione $v = \sqrt{a \cdot 2g}$, ossia, ridotto in linee il valore di $2g$, $= \sqrt{a \cdot 8688}$ linee la velocità assoluta dell' acqua fluente prima sotto la profondità di 1, poi sotto quella di 2, poi sotto quella di 3 linee, e così di seguito fino al fine di 14400 linee. Egli è chiaro, che si potrà in questo modo formare una tavola divisa in due colonne, nella prima delle quali sianvi descritte le distanze dell'acqua fluente dal livello, cominciando dalla 1.ª fino all' ultima delle linee 14400, nell'altra poi le velocità assolute dell' acqua fluente corrispondenti a quelle profondità. Quindi s' intende la costruzione della Tavola, che si chiama *parabolica*, ed il di lei uso.

42. *Coroll.* III. Poichè $v = \sqrt{a \cdot 2g}$, dev' esser anche $a = \frac{v^2}{2g}$. Onde, se sarà data la velocità assoluta dell' acqua fluente, si potrà anche ritrovare l' altezza dell' acqua nel vase.

PROBLEMA II.

Data l' altezza della sezione EF *del fluido contenuto nel vase prismatico* ACDB *al di su del fondo* CD, *ritrovare la di lei velocità as-*

soluta al sortire dal vase nell' ipotesi, che venga istantaneamente levato il fondo (fig. 2.).

43. SI ponga istantaneamente levato il fondo del vase prismatico ACDB. Egli è chiaro, che la sezione EF deve discendere con moto parallelo unicamente in vigore della sua gravità, senzachè la sua velocità venga turbata nè dal moto del fluido superiore, nè da quello dell' inferiore, discendendo in questo caso tutte le sezioni con moto parallelo, ed eguale (21.). Però in questo caso la velocità assoluta della sezione EF al sortire dal vase dev' esser quella, che conviene alla di lei libera discesa per l' altezza EC, ossia, chiamata a l' altezza della di lei discesa, dev' esser $v = \sqrt{a \cdot 2g}$ (39.). Si ponga $a = 7$ piedi, 6 pollici. Fatta la sostituzione, si troverà $v = \sqrt{90 \cdot 724} = 255$ poll. in circa $= 21$ piedi, 3 poll. parig. per ogni secondo. La sezione adunque EF al suo sortire dal vase ha una velocità capace di percorrere in un mezzo non resistente 21 piedi, 3 pollici parig. ad ogni secondo. Ciocchè ec.

PROBLEMA III.

Ritrovare la velocità assoluta dell' acqua corrente di un fiume in una data profondità col mezzo del tubo ripiegato del Sig. Pitot.

44. Il Sig. Pitot nel misurare la velocità della Senna sotto il ponte reale di Parigi adoperò uno ſtrumento di sua invenzione, del quale ne diede egli negli Atti dell' Accademia all' anno 1732. la descrizione. Queſto conſiſte (fig. 5.) nel tubo BCA di vetro ripiegato in C ad angolo retto. Si oſſerva, a che altezza sale dentro il braccio verticale BC l' acqua del fiume, opponendo l' altro braccio CA orizzontalmente al corso dell' acqua nella data profondità. Si supponga, che, immersa eſſendoſi orizzontalmente la gamba minore CA, l'acqua, che vi entra, salga nell'altro tubo BC fino all'altezza Cm, dove reſti invariabilmente ferma. Ben ſi vede, che la forza della corrente nel punto A è uguale alla preſſione della colonna Cm di acqua. Però la velocità dell'acqua della corrente nel punto A è uguale a quella, che acquiſterebbe un grave, cadendo liberamente dall'altezza Cm (26.). Quindi anche ſi troverà la velocità aſſoluta dell'acqua della corrente nella profondità, oſſia $v = \sqrt{Cm \cdot 2g}$ (39.). Il tubo verticale BC ſi può aſſicurare per mezzo di varj anelli ad un'aſta di ferro, o di legno, che ſi pianta poi verticalmente nel fondo della corrente. La profondità dell' immerſione del tubo BC dell'acqua nel fiume, come anche l'elevazione di queſta ſi può riconoscere, mettendovi a lato una riga di rame ben graduata. Ciocchè ec.

45. *Scolio*. Queſt' iſtrumento, quantunque

semplicissimo, non può dare con sufficiente esattezza la misura della velocità dell'acqua corrente, massimamente nelle grandi profondità, atteso il moto di oscillazione della colonna C*m*, il quale non lascia prender bene la misura dell' altezza. In questa guisa anche l'Hales ha creduto di poter ritrovare la velocità assoluta del sangue, applicando un tubo consimile alle arterie, e vene tagliate degli animali.

PROBLEMA IV.

Data la velocità dell' acqua fluente da un dato foro MN *del vase* ACDB (fig. 2.), *ritrovare il peso della colonna premente* RMNS.

46. Essendosi mantenuto il vase ACDB costantemente pieno, si è osservato, che l' acqua se ne sortiva dal di lui foro del diametro di $\frac{2}{4}$ di un pollice con una velocità capace di percorrere in un mezzo non resistente 26 piedi, 11 pollici, ossia 323 pollici parigini per ogni secondo. Si dimanda il peso della colonna RMNS insistente perpendicolarmente sul foro MN? Poichè è data la velocità assoluta dell' acqua fluente dal foro MN, si potrà trovare l' altezza dell' acqua nel vase ACDB, facendo uso dell'equazione $a = \frac{v^2}{2g}$

(42.). Egli è chiaro, che sarà queſt' altezza, fatta la soſtituzione dei valori noti alle lettere, $= \frac{323 \cdot 323}{724}$ pollici $= \frac{323 \cdot 323}{724 \cdot 12}$ piedi parigini. Inoltre, poichè il diametro del foro M N $= \frac{2}{4}$ $= \frac{1}{2}$ di un pollice $= \frac{1}{24}$ di un piede, poſta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7 : 22$, l' area del foro M N ſi troverà $= \frac{22}{24 \cdot 7 \cdot 96}$ di un piede quadrato. Quindi il volume della colonna R M N S sarà $= \frac{22 \cdot 323 \cdot 323}{24 \cdot 7 \cdot 96 \cdot 724 \cdot 12}$ di un piede cubico. Finalmente poichè il peso di un piede cubico di acqua è di 70 libbre parigine, sarà il peso ricercato della colonna d' acqua R M N S $= \frac{22 \cdot 323 \cdot 323 \cdot 70}{24 \cdot 7 \cdot 96 \cdot 724 \cdot 12} =$ 1 libb. 2 once 198 grani parig. in circa. Generalmente se ſi chiamerà P il peso della colonna R M N S di acqua, f l' area del foro M N espreſſa in piedi quadrati parig., p il peso di un piede cubico di acqua espreſſo in libb. parig., v finalmente la velocità aſſoluta dell' acqua fluente dal foro M N espreſſa anch' eſſa in piedi parigini, ſi avrà $P = \frac{fpv^2}{2g}$ libb. parig. Ciocchè ec.

PRO-

PROBLEMA V.

Ritrovare la misura della forza, che anima al moto la falda qMNp, *tostochè questa è intieramente uscita dal foro* MN.

47. Si ponga f la forza acceleratrice costante, che anima la falda $qMNp$ a sortire intieramente dal foro MN, ossia a descrivere con moto uniformemente accelerato uno spazio $= qM$. Si ponga inoltre F la forza acceleratrice costante, che, se venisse applicata alla stessa falda, obbligherebbe questa a descrivere con moto uniformemente accelerato nello stesso tempo infinitesimo uno spazio doppio di qM, ossia $= 2qM$. Poichè le forze acceleratrici costanti sono come gli spazj, ch'esse fanno descrivere nello stesso tempo (16.), starà $F : f = 2qM : qM$; e quindi $F = \frac{f.\ 2qM}{qM} = 2f$ $= 2RMNS$, essendo la forza acceleratrice f, che anima all'uscita dal foro MN la falda $qMNp$, eguale al peso della colonna RMNS dello stesso fluido.

Si concepisca ora la falda $qMNp$ sortita intieramente dal foro MN. Egli è chiaro, che questa falda, movendosi uniformemente colla sua velocità acquistata, deve descrivere in un tempo infinitesimo eguale a quello, che ha messo nel sortire intieramente dal foro MN, uno spazio

$= 2\,qM$. Però la forza, che anima al moto la falda $qMNp$, tostochè questa è sortita intieramente dal foro MN, è $= F$, essendo lo spazio, ch' essa percorre nello stesso tempo in ambedue i casi, perfettamente uguale. Quindi poichè $F = 2\,RMNS$, siccome abbiamo di sopra dimostrato, si deve conchiudere, che la forza, che anima al moto la falda $qMNp$, tostochè questa è sortita dal foro MN, è uguale al doppio peso della colonna dello stesso fluido, la quale insiste sul foro perpendicolarmente. Ciocchè ec.

PROBLEMA VI.

Ritrovare la misura della percossa, che riceve dall'urto diretto della vena d'acqua MmnN *la superficie piana* EG, *vicina, e parallela al fondo orizzontale* CD *del vase* ACDB.

48. LA percossa, che riceve la superficie piana dall'urto diretto della particella M d'acqua, è uguale alla forza di questa particella, ossia al doppio peso della colonna MR d'acqua, avente per base la particella M, e per altezza la retta MR, ossia al doppio peso di M. MR (47.). Parimente la percossa, che riceve la stessa superficie dall'urto diretto della particella N d'acqua, è uguale al doppio peso di N. NS, ossia di N. MR. Lo stesso devesi dire anche delle altre

particelle d'acqua esistenti nella sezione del foro MN. Adunque la percossa, che riceve la superficie piana EG dall'urto diretto della vena d'acqua M*mn*N, è uguale al doppio peso di una colonna d'acqua, la quale abbia per base la sezione del foro MN, e per altezza l'altezza RM dell'acqua contenuta nel vase ACDB, eguale cioè al doppio peso della colonna d'acqua RMNS. Ciocchè ec.

49. *Scolio*. Abbiamo quì supposto, che i fili, dai quali si può concepire composta la vena fluida M*mn*N, sieno tutti perpendicolari al piano orizzontale del foro MN, il che è contrario alla sperienza. Si vedrà a suo luogo, come debbasi correggere la misura della percossa della vena fluida.

50. *Coroll.* Quindi è manifesto, che la forza della percussione è finita rispetto a quella della semplice pressione, essendo la forza della percussione della vena fluida M*mn*N eguale al doppio peso della colonna d'acqua RMNS.

51. *Scolio*. Il celebre Evangelista Torricelli ha creduto dopo il suo immortal Maestro, che la forza di percussione fosse infinita rispetto a quella di semplice pressione; l'opinione del quale fu poscia abbracciata dalla maggior parte dei Meccanici. Se la forza di percussione producesse nel corpo, in cui agisce, una velocità finita in un tempo infinitesimo, ella sarebbe infinita riguardo alla forza di semplice pressione, non pro-

ducendo questa in un tempo infinitesimo, se non una velocità infinitesima. Ma non si può concepire, come la forza di un corpo messo in moto, la quale è finita, possa produrre in un tempo infinitesimo una velocità finita, non facendosi mai la comunicazione di un moto finito, se non in un tempo finito, benchè questo possa essere talmente corto, che sfugga ogni nostra attenzione. Però, poichè la velocità, che imprime ad un corpo in un tempo infinitesimo la forza di percussione, è infinitesima, siccom'è tale anche quella, che nello stesso tempo produce la forza di pressione, non può la prima forza esser rispetto all' altra infinita. La forza di percussione si chiama dopo il Sig. Leibnitz *forza viva*, e quella di semplice pressione forza morta.

CAPO IV.

Della misura della velocità dell'aria, allorchè questa esce dai piccoli fori dei vasi, dov' è rinchiusa, ossia la sua elasticità animata soltanto dalla compressione, ossia anche dal calore.

52. L'Aria, essendo un fluido compressibile, si riduce a minor volume, ogni qual volta esteriormente le viene applicata una forza, che obblighi le di lei parti ad avvicinarsi fra loro mu-

tuamente. Ond'è, che l'aria della nostra atmosfera, poichè viene all'ingiù premuta dal peso delle sue parti superiori, non ha in tutta la sua altezza la stessa densità; ma maggiore, o minore secondo la sua minore, o maggiore distanza dalla superficie della Terra. Ma, essendo l'aria inoltre elastica, mentre viene da una forza ridotta a minor volume, incessantemente si sforza per ritornare al suo volume di prima, e vi ritorna realmente, tostochè cessa d'agire la forza, che la comprime. Egli è chiaro, che lo sforzo dell'aria compressa per rimettersi nel suo primiero volume, ossia la *elasticità* dell'aria compressa dev'essere affatto eguale alla forza, che la comprime, purchè l'aria dopo la sua compressione possa di nuovo esser ridotta a minor volume, comunque piccolo si supponga l'aumento della forza comprimente. In fatti se la elasticità fosse maggiore, o minore della forza comprimente, potrebbe forse la massa dell'aria compressa rimanere nello stesso stato di compressione? No certamente, essendo cosa evidente, che, se la elasticità è maggiore, deve la massa dell'aria compressa spandersi in maggior volume: se poi è minore, dev'essa comprimersi di più, attesa la sua ulteriore compressibilità. Quindi facilmente s'intende

I. Che, poichè la forza, che comprime l'aria della nostra atmosfera, si è il peso della colonna d'aria, che dalla sommità dell'atmosfera su di essa perpendicolarmente insiste, deve la

elaſticità dell' aria eſſere eguale al peso della suddetta colonna. Quando ſi tratta dell' aria preſſo la superficie della Terra, il peso della colonna atmosferica, che la comprime, equivale al peso di una colonna di mercurio, la quale abbia la ſteſſa base, che l' atmosferica, e l' altezza eguale a quella del mercurio nel barometro, oſſia di 28 pollici in circa, ovvero al peso di una colonna di acqua della ſteſſa base, che l' atmosferica, e dell'altezza di 32 + $\frac{2}{7}$ piedi. Quindi è, che la elaſticità dell'aria verso la superficie della Terra può produrre lo ſteſſo effetto, che produce il peso della colonna atmosferica comprimente, ſiccome appunto succede, allorquando il barometro ſtà ripoſto in una ſtanza perfettamente chiusa, oppure allorquando il suo vasetto è ſigillato ermeticamente.

II. Che, poichè una maſſa d'aria, finchè è ulteriormente compreſſibile, a misura che ſi comprime, diventa sempre più densa, dev'eſſer la sua denſità proporzionale alla forza, che la comprime. Però la elaſticità dell'aria, eſſendo eguale alla forza comprimente, dev' eſſer anche proporzionale alla di lei denſità. Quindi, se l'aria rinchiusa dentro di un vase ſi renderà mediante la compreſſione 2, 3, 4, ec. volte più densa dell' aria preſſo la Terra, diventerà anche 2, 3, 4, ec. volte più elaſtica della ſteſſa, oſſia, eſſendo la elaſticità dell'aria preſſo la Terra eguale al peso di una colonna di 28 pollici di mercurio, di-

venterà la elasticità dell'aria compressa eguale al peso di una colonna di 56, di 84, di 112 ec. pollici di mercurio. Quì avverto, che, quando si nomina soltanto l'altezza della colonna di mercurio, o di acqua, si sottintende sempre la base della suddetta eguale a quella della colonna d'aria.

53. La compressibilità dell'aria ha i suoi limiti, al di là dei quali questa non può più essere condensata. Quali siano questi limiti, non si sa. Il Sig. Halles, che nella compressione dell'aria è andato molto più oltre, che qualunque altro Fisico, pretende di averla ridotta ad $\frac{1}{1817}$ del suo volume; il che s'è vero, giacchè il calcolo, ch'esso fa non è molto esatto, l'aria in questo caso sarebbe diventata due volte più densa dell'acqua, stando la gravità specifica dell'acqua a quella dell'aria presso la Terra = 800 : 1 in circa. L'aria si condensa dentro di un vase (fig. 6.) col mezzo di una piccola tromba premente PR, che riceve l'aria dell'atmosfera per un foro fatto verso P, e che poscia mediante la discesa dello stantuffo la espelle per un foro, che vi è in fondo al tubo, di fuori al quale vi è una valvula per impedire, che l'aria espulsa non ritorni nella tromba, allorchè s'innalza di nuovo lo stantuffo. Egli è chiaro, che, perchè possa la tromba ricever l'aria dall'atmosfera, bisogna, che lo stantuffo nella sua elevazione si ritrovi al di sopra del foro fatto verso P. La tromba si aggiusta al vase, dentro di cui si fa la condensazione dell'

aria col mezzo di una vite, siccome si vedrà, quando si parlerà della *fontana di compressione*. Nei vasi di cristallo grosso non si rende l'aria rinchiusa, se non quattro, o cinque volte più densa dell'esteriore. Se si rendesse più densa, potrebbe in vigore della sua elasticità notabilmente accresciuta mettere in pezzi il vase, dov'è rinchiusa, con grave pregiudizio dei circostanti.

54. L'elasticità dell'aria non solamente s'accresce col mezzo della compressione, ma eziandio col mezzo del calore. Quando si espone al fuoco un vase aperto soltanto in qualche parte, l'aria contenuta, quantunque dal calore rarefatta, se ne stà ciò non ostante in equilibrio coll'aria più densa dell'atmosfera. Per qual ragione? Giust' appunto, poichè riscaldandosi essa acquista un maggior grado di elasticità, che la mette nello stato di sostenere la pressione dell'aria esterna. Ma se il vase è dappertutto chiuso, sicchè l'aria rinchiusa non possa spandersi in maggior volume, la elasticità di questa può crescere in modo di mandarlo in pezzi. Per questa ragione le castagne, quando non si ha la cura d'intaccarle con un piccol taglio per dar luogo all'aria rinchiusa sotto la scorza di sortire, crepano con iscroscio sotto la cenere calda: le ampolline di vetro, che si soffiano alla lucerna di uno smaltatore, e che si sigillano ermeticamente, esposte all'azione di un fuoco gagliardo, vanno in pezzi con fracasso: le vesciche finalmente, che hanno fortemente legato

il collo con dentro un po' di aria, poste vicine al fuoco si spaccano.

55. La elasticità dell' aria si aumenta dal calore in ragione della densità, ossia, poichè questa è proporzionale alla forza comprimente, in ragione della forza comprimente, cosicchè, se la forza, che comprime l'aria, è doppia, tripla, quadrupla ec., anche l'aumento della elasticità prodotto dallo stesso grado di calore è doppio, triplo, quadruplo ec. Per esempio, quando la forza, che comprime l'aria, è di 28 pollici di mercurio, l'esperienza c' insegna, che il calore dell'acqua bollente accresce la elasticità dell'aria allora di $\frac{1}{3}$ di 28, ossia di 9 pollici, 4 linee di mercurio, cosicchè questa diventa eguale al peso di 37 poll., 4 linee di mercurio. Onde se la forza, che comprime l'aria, diventerà doppia, tripla, quadrupla, l'aumento prodotto dal calore dell'acqua bollente nella di lei elasticità sarà di 18 pollici, 8 linee, di 28 pollici, di 37 pollici, 4 linee di mercurio, ec. Se alla stess' aria si applicasse un calore maggiore di quello dell'acqua bollente, l'aumento prodotto nella sua elasticità diventerebbe ancora maggiore, cosicchè, se il calore applicato fosse doppio, l'aumento prodotto nella elasticità dell'aria, quando la forza comprimente è doppia, sarebbe = 37 pollici + 4 linee, quando è tripla, = 56 pollici, quand'è quadrupla, = 74 pollici + 8 linee, essendo l'aumento, che produce quel grado di calore, allorchè la

forza comprimente è di 28 pollici di mercurio, = 18 poll. 8 linee di mercurio, ficcome dimoſtra l'esperienza, eguale cioè a due terzi della ſteſſa forza comprimente. Su queſto principio, che la elaſticità dell'aria s'accresce di diverse quantità secondo i diverſi gradi di calore, ſi fonda la coſtruzione del termometro a aria del Sig. Amontons, termometro celebre per eſſere ſtato il primo, in cui i diverſi gradi di calore ſi sono riportati ad un termine conosciuto, vale a dire al calore dell'acqua bollente.

56. Per accertarſi, che la cosa va così appunto, come abbiam detto, ſi prenda un tubo di vetro AB (fig. 7.) di 50 pollici di lunghezza, e del diametro preso interiormente di una linea al più dappertutto, il quale ſia incurvato in DBC, e terminato da una sfera cava, e sottile di 4, o 5 pollici di diametro, e ſi fiſſi sopra una tavola graduata in pollici, ed in linee. S'infonda poscia nel tubo tanto mercurio, quanto baſta per empire la curvatura DBC, coſicchè la sua superficie ſia nel piano orizzontale DC. In queſto caso l'aria nella sfera deve avere la ſteſſa denſità, che ha l'aria eſterna preſſo la superficie della Terra, eſſendo ambedue queſt'arie egualmente compreſſe dal peso dell'atmosfera. Si supponga, che nel tempo dell'esperienza la preſſione dell'atmosfera equivalga al peso di 28 pollici di mercurio. Immersa tutta la parte inferiore del tubo in un bagno di acqua bollente in modo,

che reſti la sfera intieramente coperta, l'esperienza c' insegna, che il mercurio s' innalza nel braccio più lungo 9 pollici, 4 linee al di sopra del suo livello; il che prova, che la elaſticità dell' aria nella sfera ſi è aumentata di un terzo, eſſendo 9 pollici, e 4 linee $= \frac{1}{3}$ 28 pollici. Se dopo di aver lasciato raffreddare la parte inferiore del tubo, queſta, infusa nel braccio più lungo una colonna di 28 pollici di mercurio sopra il livello DC, s' immerga di nuovo come sopra in un bagno di acqua bollente, ſi oſſerva, che il mercurio ſi solleva 18 pollici, 8 linee; il che fa una colonna di 46 pollici, 8 linee, contando dal livello del mercurio nel braccio più corto. In queſt' altro caso eſſendo doppia di prima la compreſſione, e quindi doppia di prima anche la denſità dell' aria nella sfera, doppio anche ſi è di prima l' aumento prodotto nella sua elaſticità dallo ſteſſo grado di calore. Se il calore applicato al tubo foſſe ſtato doppio di quello dell' acqua bollente, l' aumento prodotto nella elaſticità dell' aria rinchiusa sarebbeſi trovato eguale a due terzi della forza comprimente, cioè nel 1.° caso = 18 pollici, 8 linee, e nel 2.° = 37 pollici, 4 linee. Quì però ſi ha d' avvertire, che in queſte sperienze il mercurio non sale mai esattamente alle accennate altezze, principalmente, perchè, diventando la capacità della sfera più grande nell' acqua bollente, la denſità dell' aria rinchiusa ſi scema un poco; e quindi la forza del suo ela-

terio accresciuta dal calore non può essere sì grande, come sarebbe, se la sfera avesse conservata la sua primiera capacità. Nel resto per giungere alle indicate altezze non vi manca, che una piccola quantità, quando si adopera un tubo assai sottile rispetto alla capacità della sfera.

PROBLEMA I.

Data la densità dell' aria rinchiusa dentro di una data sfera, e dato il grado del calore applicato, ritrovare la forza, ch' esercita contro l' interna superficie della sfera l' aria rinchiusa.

57. Si supponga, che l'aria dell'atmosfera mediante la compressione venga ridotta in uno spazio 1837 volte minore dell'ordinario, ossia, ch'essa diventi 1837 volte più densa, siccome crede di avere ottenuto il Sig. Halles. Si supponga di più, che quest'aria sì densa riempia una sfera del diametro di un piede parigino, e che le venga applicato un grado di calore doppio di quello dell'acqua bollente. Egli è chiaro, che posta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7 : 22$, dev'esser la superficie della sfera $= \frac{22}{7}$ piedi quadrati: che, la elasticità dell'aria nello stato naturale essendo eguale al peso di una colonna di acqua dell'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi deve la stessa,

allorchè le viene applicato un calore doppio di quello dell' acqua bollente, eſſere uguale al peso di una colonna di acqua dell' altezza di $54 + \frac{4}{9}$ piedi (56.): che finalmente, avendo riguardo alla denſità dell' aria rinchiusa dentro la sfera, dev' eſſer la di lei elaſticità eguale al peso di una colonna di acqua dell' altezza di $\overline{54 + \frac{4}{9}} .$ 1837 piedi parig. Quindi ſi troverà la forza, che l' aria rinchiusa esercita contro l' interna superficie della sfera in virtù della sua elaſticità animata da un calore doppio di quello dell' acqua bollente, eguale al peso di $\frac{11}{7} . \overline{54 + \frac{4}{9}} . 1837$ piedi cubici di acqua, oſſia, poichè il peso di un piede cubico di acqua è di 70 libb. parig., $= \frac{11}{7} . \overline{54 + \frac{4}{9}} . 1837 . 70 = 22003177$ libb. parig. in circa. Generalmente se ſi chiamerà s la superficie interna del vase, che contiene l'aria, espreſſa in piedi parig. quadrati, n il numero delle volte, che la denſità dell' aria contenuta nel vase contiene la denſità dell' eſterna, a l' altezza di $32 + \frac{2}{7}$ piedi di acqua, b l' aumento, che produce nell' elaſticità dell' aria rinchiusa il calore applicato, espreſſo in piedi di acqua, p il peso di un piede cubico parig. di acqua espreſſo in libbre parig., F finalmente, la forza, che contro la superficie s del vase fa l'aria rinchiusa in vigore della sua denſità, e calore, ſi troverà $F = \overline{a + b} . nps$ libb. parig. Ciocchè ec.

58. *Scolio*. Secondo le oſſervazioni del Sig.

Cavalieri nell'Istoria dell'Accademia Reale di Parigi all'anno 1707 libbre 140 di polvere da schioppo sollevano nelle mine militari 30000 libbre di terra. Nell'ipotesi, che la resistenza, che la terra oppone alla sua elevazione, provenga soltanto dal suo peso (la qual ipotesi, quantunque non sia molto esatta, dipendendo la suddetta resistenza anche dalla tenacità della stessa materia, può però servire a darci qualche idea della forza smisurata, che fa quell'aria sì densa, e sì riscaldata), si troverà, che per sollevare 22003177 libb. parig., alle quali equivale la forza dell'aria suddetta, a quell'altezza, a cui si solleva la terra nelle mine militari, son necessarie 102681, e più libb. di polvere.

59. *Coroll.* Quindi s'intende, con quanta ragione abbia asserito il Sig. Amontons, che l'aria fortemente compressa dentro le viscere della Terra, se viene da qualche fuoco sotterraneo animata, può produrre gli effetti funesti del terremoto.

PROBLEMA II.

Ritrovare la velocità assoluta, con cui l'aria, che riempie il vase ACDB (fig. 3.) *dappertutto chiuso, deve, aperto il piccol foro* D*d*, *sortire nel voto nell'ipotesi, che la sua densità sia eguale a quella dell'aria esteriore presso la superficie della Terra.*

60. Essendo il vase ACDB, siccome si suppone, non molto alto, si può considerare la densità dell'aria rinchiusa come dappertutto eguale. Inoltre poichè l'aria rinchiusa ha la stessa densità, che l'aria esteriore presso la Terra, deve la sua elasticità esser eguale al peso di una colonna di acqua di $32 + \frac{2}{3}$ piedi parig. Ora si cerchi l'altezza, che deve avere una colonna di aria dappertutto della stessa densità dell'esteriore presso la Terra, affinchè abbia lo stesso peso di una colonna di acqua della stessa base, e dell'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi, ossia di 392 pollici parig. Poichè la gravità specifica dell'acqua stà a quella dell'aria presso la Terra $= 800 : 1$, se si farà $392 : x = 1 : 800$, essendo le gravità specifiche di due colonne di egual peso, e di egual base in ragione inversa delle altezze, si avrà la ricercata altezza $x = 392 . 800$ poll. parig. Egli è chiaro, che la velocità dell'aria, mentre questa sorte in vigore della sua elasticità per il foro Dd del vase ACDB nel voto, dev'essere eguale a quella, che la stessa avrebbe, se posto pieno il vase ACDB di aria egualmente densa fino all'altezza di 392. 800 poll. parig., vi sortisse in vigore soltanto della pressione, che sostiene dal peso dell'aria superiore, essendo eguale in ambedue i casi la forza espulsiva dell'aria dal vase. Quindi è, che, essendo $v = \sqrt{a . 2g}$, dev'esser la velocità dell'aria, che sorte in virtù

della $\overline{\text{sua elasticità}}$ dal foro D*d* nel voto, $= \sqrt{392 \cdot 800 \cdot 724} = 15067$ in circa poll. parig. in un secondo. Ciocchè ec.

61. *Coroll.* I. Quindi s'intende, quanto sia grande la velocità dell'aria dell'atmosfera, allorchè questa in vigore della sua elasticità passa nel voto. Si ponga *m* lo spazio, che percorre in un secondo il vento più impetuoso. Paragonando questo spazio con quello, che descrive l'aria entrando nel voto, si troverà, quante volte la velocità di questa sia maggiore della velocità del vento più impetuoso. Ora $m = 32$ piedi parig. secondo le osservazioni di M. Mariotte, $= 68$ piedi inglesi secondo quelle di Derham, $= 85$ piedi parig. finalmente secondo de la Condamine. Pare, che, prendendo un mezzo fra queste varie misure, si possa stabilire lo spazio, che descrive in un secondo il vento più impetuoso della Terra ordinariamente, ossia $m = 60$ piedi parig. in circa.

62. *Coroll.* II. La velocità dell'aria fluente dal vase ACDB in uno spazio voto è sempre la stessa sì nel principio, come anche in fine di un dato tempo del suo flusso. Imperocchè la densità dell'aria, che sorte per il foro D*d*, e la forza elastica, che ne produce il flusso, si scemano nella stessa ragione. Ond'è, che, conservandosi sempre la stessa ragione tra la forza motrice, e la massa, che questa mette in moto, la velocità deve sempre restare la stessa, giacchè si

sa,

sa, ſiccome abbiam già detto (37.), che, quando le forze motrici sono proporzionali alle maſſe, ch' eſſe movono, producon sempre la ſteſſa velocità.

63. *Scolio*. Si ponga la denſità dell' aria rinchiusa in fine di un dato tempo $= \frac{1}{n}$ di quella, che l' aria avea sul principio del suo moto. Sarà la elaſticità di queſt' aria eguale al peso di una colonna d' acqua di $\frac{392}{n}$ poll. parig. Ora, poichè l' aria rinchiusa è n volte più rara di prima, il peso di quella colonna d' acqua deve equivalere poſta la ſteſſa base, al peso di una colonna della ſtess' aria rinchiusa di $\frac{392}{n}$. n. 800, oſſia di 392. 800 poll. parig. Perciò la velocità dell' aria, che sorte nel voto in fine del dato tempo, dev' eſſer $= \sqrt{392 . 800 . 724} = 15067$ in circa poll. parig. in un secondo, come sopra.

PROBLEMA III.

Data la denſità dell' aria condensata nel vase ACDB *ritrovare la velocità aſſoluta, con cui queſta, aperto il foro* Dd, *sorte nell' aria dell' atmosfera.*

64. SI ponga n il numero delle volte, che la denſità dell'aria rinchiusa contiene quella dell'aria

atmosferica appresso la superficie della Terra. Se l'aria rinchiusa sortisse nel voto in vigore della sua elasticità, la forza, con cui essa sarebbe espulsa per il foro Dd del vase, sarebb' eguale al peso di una colonna d'acqua, che avesse per base il foro Dd, e per altezza $\overline{32 + \frac{2}{3}} \cdot n$ piedi $= 392 \cdot n$ pollici parig. Ma poichè sorte nell' atmosfera, siccome si suppone, deve alla di lei uscita opporsi direttamente l'aria esterna con forza eguale al peso di una colonna d'acqua della stessa base, e dell'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi, ossia di 392 pollici parig. Perciò la forza, con cui viene espulsa per il foro Dd nell'atmosfera l'aria rinchiusa, dev'esser soltanto eguale al peso di una colonna d'acqua, che abbia la stessa base Dd, e l'altezza di $392 \cdot n - 392 = 392 \cdot \overline{n - 1}$ poll. parig. Ora essendo l'aria rinchiusa n volte più densa dell'esterna, essa non è, se non $\frac{800}{n}$ volte più rara dell'acqua. Quindi il peso di una colonna d'acqua di $392 \cdot \overline{n - 1}$ pollici è uguale al peso di una colonna d'aria egualmente densa, che la rinchiusa, di $392 \cdot \overline{n - 1} \cdot \frac{800}{n} = 313600 - \frac{313600}{n}$ pollici parig., posta la stessa base. Quindi se si farà lo stesso raziocinio come nel Probl. precedente, si troverà la velocità as-

soluta, con cui l'aria rinchiusa nel vase ACDB, aperto il foro Dd, sorte sul principio del suo moto nell'atmosfera, ossia si troverà $v = \sqrt{a \cdot 2g}$ $= \sqrt{\left((313600 - \frac{313600}{n}) \cdot 724 \right)}$ poll. parig. in un secondo. Ciocchè ec.

Esempio. L'aria rinchiusa nel vase ACDB è tre volte più densa dell'esterna presso la superficie della Terra. Si dimanda la velocità assoluta, con cui essa, aperto il foro Dd, deve sortire nell'atmosfera? Essendo $n = 3$, si troverà $v = \sqrt{\left((313600 - \frac{313600}{3}) \cdot 724 \right)} =$ 12303 poll. parig. in circa in un secondo.

65. *Coroll.* I. Poichè il valore della frazione negativa $- \frac{313600}{n}$ diventa maggiore, allorchè si scema il denominatore n, mentre resta invariabile il numeratore 313600, deve, durante il flusso, scemarsi la velocità v, scemandosi in questo caso la densità dell'aria rinchiusa. Giustamente: poichè resta sempre invariabile sensibilmente la resistenza, che l'aria esterna oppone all'uscita dell'aria interna, mentre si diminuisce la elasticità di questa.

66. *Coroll.* II. Il flusso dell'aria deve cessare, quando la densità dell'aria rinchiusa divien eguale a quella dell'esterna. In questo caso di-

venta $n = 1$, e quindi $313600 - \frac{313600}{1}$

$= 0$; onde anche $\sqrt{\left((313600 - \frac{313600}{1}) . 724 \right)}$

$= 0$, ossia $v = 0$. Nè ciò ci deve far maraviglia, essendo in questo caso la forza elastica dell'aria rinchiusa, che produce il flusso, eguale alla pressione dell'aria esterna, che direttamente si oppone allo stesso.

67. *Coroll.* III. Quindi s'intende, come si possa ritrovare la velocità dell'aria fluente per il foro D*d* in fine di un dato tempo, purchè sia dato il numero n delle volte, che la densità dell'aria residua nel vase in fine di quel tempo contiene la densità dell'atmosfera, essendo anche in quest'altro caso $v = \sqrt{\left((313600 - \frac{313600}{n}) . 724 \right)}$ poll. parig. in un secondo.

PROBLEMA IV.

Data la densità dell'aria condensata nel dato vase cilindrico ACDB (fig. 2.), *e data la velocità assoluta di uno stantuffo, che, movendosi uniformemente da* AB *verso* CD, *spinge fuori l'aria rinchiusa, ritrovare la velocità assoluta, con cui questa sorte per il foro* MN *nel voto, o nell'atmosfera.*

68. IL diametro del vase cilindrico ACDB si dica D, e quello del foro d. Egli è chiaro, che, posta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7 : 22$ sarà una sezione di quel vase $= \frac{11}{14} D^2$, e la sezione del foro MN $= \frac{11}{14} d^2$. Si ponga c la celerità assoluta, con cui lo stantuffo si move dall'insù all'ingiù. Ognun vede, che deve stare la velocità, con cui si move lo stantuffo dall'insù all'ingiù, alla velocità x, con cui deve sortire dal foro MN l'aria interna, se fosse solamente fluida senza esser punto elastica, come la sezione MN del foro ad una sezione del vase ACDB (19.), ossia deve stare $c : x = \frac{11}{14} d^2 : \frac{11}{14} D^2 = d^2 : D^2$. Perciò la velocità x, con cui l'aria sortirebbe dal foro MN, se fosse soltanto fluida, $= \frac{cD^2}{d^2}$. Ma poichè l'aria, che sorte dal foro MN, è di più elastica, deve oltre la velocità, che acquista dalla spinta dello stantuffo in vigore della sua fluidità, aver anche quella, che risulta dalla sua elasticità. Adunque se si cercherà la velocità v, che ha l'aria rinchiusa in vigore della sua fluidità al sortire dal foro MN nel voto (60.), oppure nell'atmosfera (64.), e si farà la somma di quest'ultima, e della prima, si avrà finalmente la velocità ricercata $= v + \frac{cD^2}{d^2}$. Ciocchè ec.

PROBLEMA V.

Data la densità dell' aria condensata nel vase ACDB, *e dato l' aumento, che produce nella sua elasticità il calore applicato, ritrovare la velocità, con cui l' aria, aperto il piccol foro* MN, *sorte nell' atmosfera.*

69. POichè è data la densità dell' aria nel vase ACDB, e dato l'aumento, che produce nella di lei elasticità il grado del calore applicato, si potrà facilmente ritrovare l'altezza della colonna d' acqua, col peso della quale può fare equilibrio l' elasticità dell' aria rinchiusa. Si ponga dunque A l'altezza di questa colonna espressa in poll. parig. Ma poichè all' uscita dell' aria interna si oppone l' esterna con forza eguale al peso di una colonna d'acqua della stessa base, e dell'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi, ossia di 392 pòll. parig., dev' esser la forza, con cui l' aria rinchiusa viene spinta nell' atmosfera, $= A - 392$ pollici. Egli è chiaro, che la velocità, con cui l' aria nel vase ACDB deve, aperto il foro MN, sortire sul principio del suo flusso nell'atmosfera, dev' esser quella, che conviene al peso di una colonna d'aria dappertutto della stessa densità dell' aria rinchiusa, e dell' altezza di

$\overline{A - 392} \cdot \frac{800}{n}$ pollici, ossia dev'esser $v = \sqrt{a \cdot 2g}$
$= \sqrt{\left((A - 392) \cdot \frac{800}{n} \cdot 724 \right)}$ poll. parig. in un secondo. Se l'aria rinchiusa è nel suo stato naturale di densità, $n = 1$. Perciò $v =$
$\sqrt{\left((A - 392) \cdot 800 \cdot 724 \right)}$ poll. parig. in un secondo. Ciocchè ec.

Esempio. All'aria rinchiusa nel vase ACDB è stato applicato il calore dell'acqua bollente. Si dimanda la velocità, con cui quella, aperto il foro MN, sorte nell'atmosfera nell'ipotesi, che la stessa sia tre volte più densa dell'esterna? Poichè il calore dell'acqua bollente accresce di un terzo la elasticità dell'aria rinchiusa, sarà l'aumento prodotto eguale al peso di una colonna d'acqua dell'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi. Quindi tutta l'elasticità dell'aria rinchiusa, compreso anche l'aumento prodotto dal calore, dev'esser eguale al peso di una colonna d'acqua dell'altezza di $\overline{32 + \frac{2}{3}} \cdot 3 + 32 + \frac{2}{3}$ piedi, ossia di 1568 poll. parig., cosicchè $A = 1568$ poll. parig. Laonde si avrà $v = \sqrt{\left((1568 - 392) \cdot \frac{800}{3} \cdot 724 \right)} = 15069$ in circa poll. parig. in un secondo.

PROBLEMA VI.

Dato l'aumento, che produce il calore nella elasticità dell'aria, che riempie il vase ACDB *aperto soltanto in* MN, *ritrovare la velocità assoluta, con cui l'aria esteriore entrerebbe per quel foro nel vase, se l'aria rinchiusa perdesse tutto in un tratto il calore concepito.*

70. SI concepisca al foro MN una chiave, che possa dare, o togliere all'aria rinchiusa la comunicazione coll'aria esterna. Indi, chiuso il foro, si metta il vase ACDB sul fuoco, e dopo qualche tempo si apra il foro. Poichè il calore accresce l'elasticità dell'aria rinchiusa, deve per il foro MN sortire dell'aria, finchè la elasticità dell'aria rinchiusa sia eguale alla pressione, ossia alla elasticità dell'aria dell'atmosfera. Si chiuda ora il foro MN, e si levi dal fuoco il vase ACDB. Egli è chiaro, che se si lascierà raffreddare il vase ACDB, finchè acquisti la stessa temperie dell'aria esterna, ossia finchè perda tutto il calore concepito, dovrà l'aria rinchiusa perdere l'aumento della sua elasticità prodotto dal calore, e quindi, aperto il foro MN, non potrà essa più stare in equilibrio colla pressione, ossia colla elasticità dell'aria dell'atmosfera. Dovrà dunque quest'ultima entrare

per il foro MN, e non potrà cessare il flusso, se non nel caso, che l'elasticità dell'aria nel vase sia eguale a quella dell'aria esterna, ossia se non nel caso, ch'essa sia eguale a quella, che avea avanti il riscaldamento, ossia finalmente se non nel caso, ch'entri per il foro nel vase tant'aria, quanta n'è sortita per lo stesso a cagione del riscaldamento. Però la velocità, con cui l'aria esterna, aperto il foro MN entra sul principio nel vase, è quella stessa, che conviene all'aumento prodotto nella elasticità dell'aria rinchiusa dal grado del calore applicato. Adunque, poichè, siccome quì si suppone, la densità dell'aria rinchiusa avanti il riscaldamento è eguale alla densità dell'aria esterna, se si chiamerà A' l'altezza della colonna d'acqua, col peso della quale può far equilibrio quell'aumento, e se di più si esprimerà quest'altezza in pollici parigini, si troverà la velocità assoluta, con cui l'aria esterna, aperto il foro MN, entra sul principio nel vase, ossia $v = \sqrt{A' . 800 . 724}$ poll. parig. in un secondo. Ciocchè ec.

71. *Scolio*. Nello stesso modo si scioglie anche quest'altro. Si supponga, che il vase ACDB sia dappertutto chiuso, e voto, e che, aperto poscia il foro Dd (fig. 3.), vi entri l'aria dell'atmosfera. Si dimanda la velocità assoluta, con cui questa deve entrare in fine di un dato tempo, data la ragione della densità dell'aria esterna alla densità dell'interna? Si ve-

de, che l'aria esterna deve per il foro Dd entrare nel vase in fine del dato tempo con quella velocità, che conviene all'eccesso della sua densità sopra quella dell'aria interna. Però dev'esser $v = \sqrt{A' . 800 . 724}$ poll. parig. in un secondo, dove A' in questo caso esprime l'altezza della colonna di acqua, col peso della quale può far equilibrio il suddetto eccesso, in poll. parig. Se $A' = 0$, anche $v = 0$, ossia il flusso dell'aria esterna dovrà cessare, quando l'aria nel vase avrà la stessa densità. Abbiamo supposto in ambedue i Problemi invariata la densità dell'atmosfera, quantunque in questo si sia scemata della quantità d'aria entrata nel vase sul principio del flusso, nell'altro accresciuta della quantità d'aria sortita dal vase in tempo del riscaldamento. Ma egli è chiaro, che la piccola quantità d'aria o entrata, o sortita dal vase non può portare nella densità dell'atmosfera, se non una variazione insensibile. Però la soluzione data sì dell'uno, come dell'altro Problema è esatta.

PROBLEMA VII.

Dato l'aumento della pressione, che produce in una massa di aria dell'atmosfera una causa, qualunque questa sia, ritrovare la velocità iniziale del vento prodotto.

72. Si prendano nell'atmosfera le due colonne d'aria BE, CF eguali, ed egualmente fredde

(fig. 8.). Egli è chiaro, che, *caeteris paribus*, queste debbono essere in equilibrio, essendo le pressioni, che le loro parti sostengono nelle stesse sezioni orizzontali, affatto eguali. Si ponga ora, che l'aria della parte D E inferiore della colonna B E acquisti maggior pressione, qualunque sia la causa produttrice di quest' aumento, mentre l'aria della parte dF della colonna C F resta nel primiero stato di pressione, sarà l'equilibrio tra l'aria delle parti D E, dF tolto, e l'aria della piaggia D E, dov'è più premuta, dovrà portarsi verso dF, dove la pressione è minore. Egli è chiaro, che dev' esser la velocità iniziale del flusso dell' aria, ossia del vento $v = \sqrt{A' . 800 . 724}$ poll. parig. in un secondo, dove in quest'altro caso A' dinota in poll. parig. l'altezza della colonna d' acqua corrispondente all'aumento prodotto nella pressione dell'aria della parte D E. Ciocchè ec.

73. *Scolio*. Abbiamo supposto, che la parte D E della colonna d'aria B E sia vicina alla superficie della Terra. Se fosse lontana, bisognerebbe per isciogliere il Problema, che fosse data, oppure ritrovata, oltre l'aumento della pressione, la gravità specifica dell' aria in quella stessa parte.

74. *Coroll.* I. Si ponga $A' = 1$ pollice lineare di acqua: si troverà la velocità del vento prodotta da una pressione equivalente ad un solo pollice di acqua $= 63$ piedi parig. e più in un secondo, maggiore cioè della velocità del più impetuoso vento (61.).

75. *Coroll.* II. Quindi s' intende la forza dei venti *burrascosi*. Imperocchè se una pressione equivalente ad un pollice di acqua, ch' è minore di una linea di mercurio, fa nascere un vento sì veloce, che sarà, allorchè la pressione è di molte linee, ossia allorchè il mercurio nel barometro ascende in un tratto per molte linee, siccome alcune volte si osserva? E' vero, che la velocità del vento prodotto si scema, e per l' aria, ch' esso deve spingere dinanzi a se, e per gli altri ostacoli, che incontra nel suo moto. Può però, non ostante tutti quest' impedimenti, esser sì grande di atterrare le piante, e di portar via le capanne e gli animali, siccome fanno i venti burrascosi.

76. *Scolio*. Tra le cause, che possono togliere l' equilibrio, che regna fra le parti dell' aria dell' atmosfera, non si deve ommettere il calore. Si prendano nell' atmosfera le due colonne BE, CF eguali, ed egualmente fredde. L'equilibrio, che regna fra loro, sarà tolto, se si supporrà, che le parti, dond' è composta la colonna BE, vengano in guisa tale riscaldate, che questa acquisti l' altezza EA maggiore della prima EB, mentre l' altra colonna CF resta nello stesso stato di prima. In questa ipotesi le due colonne AE, CF esercitano, è vero, alle loro basi E, F la stessa pressione, essendo il peso della colonna AE sensibilmente uguale a quella della prima colonna BE, e perciò anche uguale a quello dell'

altra colonna CF. Ma la cosa non va così nelle loro parti superiori. Si tiri sopra le basi E, F delle due colonne AE, CF il piano orizzontale D*d*. Ciascun vede, che la pressione dell'aria nella sezione D della colonna AE dev'esser maggiore della pressione dell'aria nella sezione *d* della colonna CF. Imperocchè, essendo il peso della colonna AE eguale al peso dell'altra CF, ed il peso della parte DE di AE minore del peso della parte *d*F di CF per esser questa più densa della prima, deve anche il peso dell'altra parte AD esser maggiore del peso dell'altra parte B*d*, ossia la pressione dell'aria nella sezione D dev'esser maggiore della pressione dell'aria nella sezione *d*. Perciò se le due sezioni D, *d* delle colonne AE, CF comunicassero fra loro, siccome succede nell'atmosfera, non potrebbero esse stare fra loro in equilibrio, ma dovrebbe dalla sezione D più premuta passar l'aria nell'altra sezione *d* meno premuta. Ma, poichè passando il vento dalla piaggia calda D dell'atmosfera nella fredda *d* s'accresce il peso, e perciò anche la pressione della colonna CF, e si scema per lo contrario il peso, e quindi la pressione della colonna AE, ne siegue, che, data la comunicazione tra F, ed E, deve l'aria dalla piaggia fredda F passare nella calda E. Adunque, quando una parte dell'atmosfera viene notabilmente riscaldata, due venti debbono nascere, uno superiore, che spiri dalla regione

calda D verso la fredda d, l'altro inferiore, che spiri dalla fredda F verso la calda E. Se sarà dato l'eccesso della pressione in D, o in F, si troverà col mezzo del Problema superiore la velocità iniziale del vento spirante da D in d, oppure da F in E, purchè sia data la gravità specifica dell'aria in quei due luoghi. Non deve dunque far maraviglia.

I. Se si osserva spesse volte, che due venti, mentre uno spira nella parte superiore, e l'altro nella inferiore dell'atmosfera, si movono secondo direzioni contrarie.

II. Se alloraquando due stanze comunicano fra loro per una porta aperta, riscaldandosi una di queste notabilmente mediante l'accensione del fuoco, si osserva, che l'aria superiore della stanza riscaldata scorre nella stanza fredda, e l'aria inferiore di questa nella riscaldata, siccome può ciascuno sperimentare, applicando la fiamma di una candela ora alla parte superiore, ora alla parte inferiore della apertura di una porta.

III. Se finalmente alloraquando si fa fuoco in un cammino, tostochè l'aria imminente viene dal calore rarefatta, l'inferiore da ogni parte subito si porta al fuoco, e se ne sorte poscia insieme col fumo, che manda la materia combustibile, per lo stesso cammino. L'aria, che si porta al fuoco del cammino, vien subito rimpiazzata nella camera dall'aria, che vi entra per le porte, e le finestre, oppure, se questi pas-

saggi le son chiusi, per le picciole aperture, siccome si osserva, tenendovi vicina la fiamma di una candela. Quindi s'intende, donde avviene alcune volte il fumo dei cammini. Avviene, perchè la camera è talmente chiusa, che per le fessure nón vi si può introdurre tant'aria, quanta n'esce per il cammino. Allora la corrente dell'aria, che dalla stanza si porta al fuoco del cammino, e che per questo insieme col fumo se ne sorte, s'indebolisce, e il fumo, che non può più esser da quella portato all'insù, si spande nella camera. Dissi *alcune volte*, non sempre, giacchè ciascun sa, ch'esso può provenire anche da altre cause, per esempio dall'apertura dei cammini o troppo piccola, o troppo grande, dal troppo ristringimento delle canne, dalla troppa bassezza dei cimaruoli ec.

C A P O V.

Della misura della velocità dell'acqua fluente dai piccioli fori dei vasi, allorchè questa viene dalla pressione dell'aria rinchiusa determinata all'uscita.

77. L'Acqua molte volte è animata dalla pressione dell'aria all'uscita dai piccioli fori dei vasi, siccome si osserva nei sifoni, e nelle fontane pneumatiche. Ecco in questo caso la misura

della sua velocità insieme colla esposizione dei fenomeni principali dei sifoni.

PROBLEMA I.

Si supponga lo spazio ECDF (fig. 2.) *del vase* ACDB *pieno di acqua, l'altro* AEFB *pieno di aria condensata, e chiusa. Si dimanda la velocità assoluta, con cui deve sortire l'acqua, aperto il foro* MN, *sul principio del suo scolo nell'atmosfera, data essendo la densità dell'aria rinchiusa, e l'altezza dell'acqua contenuta?*

78. Il numero delle volte, che la densità dell'aria rinchiusa contiene quella dell'esterna presso la Terra si dica n, ed espressa l'altezza EC dell'acqua in pollici parigini, si dica a. Egli è chiaro, che l'acqua, che si affaccia al foro MN, viene dalla pressione dell'acqua, e dell'aria rinchiusa obbligata all'uscita con forza eguale al peso di una colonna d'acqua dell'altezza di $392 . n - 1 + a$ poll. parig., essendo la pressione, che l'acqua contenuta esercita sul foro MN all'ingiù, eguale al peso di una colonna d'acqua dell'altezza di a, quella, che l'aria rinchiusa in vigore della sua elasticità, eguale al peso di una colonna dell'altezza di $392 . n$, quella finalmente, che l'aria esterna esercita all'insù contro lo

tro lo ſteſſo foro MN, oſſia quella, con cui l' aria eſterna ſi oppone all' uſcita dell'acqua dal foro, eguale al peſo di una colonna di acqua dell'altezza di 392 pollici parigini. Quindi la velocità, con cui l' acqua ſorte dal vaſe nell'atmosfera preſſo la ſuperficie della Terra ſul principio del ſuo moto, oſſia $v = \sqrt{((392 . \overline{n - 1} + a) . 724)}$ poll. parig. in un ſecondo. Se il vaſe in vece dell'acqua contiene il mercurio, ſi trova $v = \sqrt{((28 . \overline{n - 1} + a) . 724)}$ pollici parigini in un ſecondo. Ciocchè ec.

79. *Scolio*. Notiſſimo ſi è lo ſchioppo a vento, che chiamaſi anche *pneumatico*. Le ſue parti principali ſono, ſiccome ciaſcun ſa, *due canne* di ferro collocate l'una nell'altra, e tra le quali vi reſta uno ſpazio eſattamente chiuſo: una piccola *tromba di compreſſione* ſituata nel calcio dello ſchioppo, col mezzo della quale ſi condenſa l'aria nello ſpazio compreſo tra le due canne: *due valvole* finalmente, una all'eſtremità della tromba per impedire, che non vi ritorni l'aria, quando ſi ritira lo ſtantuffo, e l'altra alla eſtremità della canna interna dalla parte della culatta, dove ſi mette la palla da eſpellerſi. Queſt'ultima ſi leva col mezzo di un paſſerino, affine di laſciar paſſare l'aria nella piccola canna, e poſcia ſi rinchiude prontamente, affine di non laſciare ſcappare, ſe non parte dell'aria rinchiu-

sa. A questa macchina si dà la forma di uno schioppo, e col moto del cane si fa levare il passerino.

PROBLEMA II.

Data la densità dell' aria rinchiusa in uno schioppo pneumatico, ritrovare la velocità della palla di piombo, dalla quale esso è caricato, al di lei sortire in un mezzo non resistente.

80. Si dica n la ragione della densità dell'aria rinchiusa dentro le due canne alla densità dell' aria presso la Terra. Egli è chiaro, che, chiamata a l'area dell'equatore della palla, dev'esser la forza, che fa l'aria rinchiusa in vigore della sua elasticità contro la superficie della palla, eguale al peso di una colonna di mercurio della base $= a$, e dell'altezza $= n.28$ pollici parigini. Ora si cerchi l'altezza, che deve avere una colonna di piombo della stessa base, e peso della colonna suddetta di mercurio. Si ponga x l'altezza ricercata, S la gravità specifica del mercurio, s quella finalmente del piombo. Poichè le due colonne hanno la stessa base, e lo stesso peso, debbono le loro altezze essere in ragione inversa delle gravità specifiche, ossia dev' essere $n.28 : x = s : S$. Adunque si cerchino

nella Tavola delle gravità specifiche i valori delle quantità S, s. Io trovo, che la gravità specifica del piombo di Germania, ossia $s = 11{,}310$, quella del mercurio di Germania, ossia $S = 14{,}000$. Però, fatta la sostituzione, si ha $n.28 : x = 11310 : 14000$, e quindi $x = \frac{n.28.14000}{11310}$ pollici parigini. La palla dunque viene premuta al di fuori dall'aria rinchiusa nello schioppo pneumatico con forza eguale al peso di una colonna di piombo della base $= a$, e dell'altezza $= \frac{n.28.14000}{11310}$ poll. parig., essendo il peso di questa eguale a quello della colonna soprammentovata di mercurio.

Si apra nel fondo CD del vase ACDB il foro MN circolare dello stesso diametro della palla, e vi si concepisca applicato l'equatore di questa. Si supponga quel vase pieno di piombo nello stato di fluidità fino all'altezza di $\frac{n.28.14000}{11310}$ pollici, e sia la densità di quello eguale a quello della palla. Si vede chiaramente, che l'equatore MN della palla deve in un mezzo non resistente, siccome quì si suppone, moversi colla stessa velocità, ossia esso di materia fluida, o di materia solida, essendo in ambedue i casi affatto eguale la forza motrice. Adunque se si cercherà la velocità, che avrebbe l'equatore MN, se

fosse di piombo fluido, ossia se si farà $v = \sqrt{\left(\frac{n . 28 . 14000 . 724}{11310}\right)}$ poll. parig. in un secondo, questa sarà la velocità, con cui si moverà la palla di piombo espulsa dallo schioppo a vento in un mezzo non resistente. Ciocchè ec.

81. *Scolio*. Questa è la soluzione, che noi diamo di sì bel Problema non ancora, siccome credo, stato sciolto da alcuno. Gli schioppi a vento sono, secondo il Sig. Nollet, istrumenti più curiosi, che utili. „ La difficoltà di fabbricarli, quella di mantenerli lungo tempo in buono stato li rende necessariamente più cari, e di men comodo, e men sicuro uso, che i fucili da polvere ordinarj. Il solo vantaggio, che potrebbe in essi trovarsi, quello cioè di colpire senza essere sentiti, potrebbe diventare pregiudiziale nella società, e mi pare un molto saggio avvedimento il coartare, e ristringere, più che sia possibile, l' uso di così fatti istrumenti. Coloro, che gli amano, ne favellano spesso, e con entusiasmo: ma fan loro più d' onore, che non meritano, attribuendo ad essi quegli effetti, de' quali in realtà non sono capaci. Non è vero, per esempio, che abbiano mai tanta forza, quanta un' arma da fuoco; ed è cosa rarissima, che le lenguelle tengano con tanta costanza l' aria, che si possano tenere per lungo tempo caricati ". Sono parole del citato Autore nella sua X. Lezione di *Fisica esperimentale*.

PROBLEMA III.

Date le altezze delle gambe disuguali di un sifone, e della parte della gamba minore immersa nell' acqua, ritrovare la velocità assoluta dell' acqua al sortire del sifone.

82. Si ponga la suprema superficie dell' acqua, che si contiene nel vase ACDB (fig. 9.) nel piano orizzontale *rr*, e sia *sm* la parte della gamba minore M*m* del sifone *m*MN immersa nell' acqua, ed applicata la bocca all' orifizio N della gamba maggiore MN, se ne levi, succhiando tutta l' aria rinchiusa. Egli è chiaro, che dalla pressione, che dall' aria dell' atmosfera sostiene all' ingiù la superficie *rr* dell' acqua nel vase ACDB, deve questa salire per il sifone *m*MN, e riempierlo intieramente, e che, levata la bocca dall' orifizio N, deve la stessa sortire dall' orifizio N del sifone con forza eguale al peso della colonna d' acqua *n*N, siccome abbiamo dimostrato nella Idrostatica. L' acqua dunque deve sortire dall' orifizio N sul principio del suo scolo con quella stessa velocità, con cui sortirebbe dallo stesso orifizio, se questo fosse situato nel fondo di un vase pieno fino all' altezza *n*N. Però, chiamata A l' altezza della gamba maggiore MN, *a* quella della minore M*m* del sifone, *b* finalmente quella della parte immersa

nell'acqua, poichè $Nn = A - a + b$, dev'esser la velocità dell'acqua fluente dall'orifizio N del sifone sul principio dello scolo, ossia $v = \sqrt{\left((A - a + b) . 724 \right)}$ poll. parig., in un secondo, purchè le altezze A, a, b sieno espresse in pollici parigini. Ciocchè ec.

83. *Scolio*. Dissi *sul principio dello scolo*. Imperocchè, abbassandosi, durante lo scolo, la superficie rr dell'acqua nel vase ACDB, si scema l'altezza nN della colonna d'acqua premente, e quindi anche la velocità dello scolo. Se si vuole, che l'acqua fluente dall'orifizio N del sifone sia costantemente la stessa, bisogna mantenere sempre costante l'altezza dell'acqua nel vase, infondendovi dall'alto leggermente tanto di acqua, quanto ne sorte dall'orifizio N del sifone.

PROBLEMA IV.

Fare un vase, che non mandi dal suo foro scolpito nel fondo l'acqua contenuta, finchè questa non giunga dentro il vase ad una data altezza, e che, incominciato una volta lo scolo per il suo foro, continui a mandar l'acqua fino alla sua totale evacuazione.

84. Sia Ca l'altezza, a cui deve arrivar l'acqua dentro il vase ACDB, avantichè sorta dal foro N scolpito nel fondo del di lui piediſtallo. Per fare, che l'acqua giunta a quell'altezza sorta tutta dal foro N, bisogna applicare il ſifone mMN dentro il vase in modo, che la sua sommità M ſi trovi nella orizzontale ab tirata dal punto a, l'eſtremità m della sua gamba minore mM quaſi nel fondo CD del vase, l'altra N finalmente della maggiore NM nel foro N. Egli è chiaro, che quantunque ſia aperto il foro N del vase, non potrà l'acqua sortire, finchè l'altezza dell'acqua contenuta nel vase sarà minore di Ca, non potendo in queſto caso l'acqua, ch'entra nella gamba minore del ſifone, paſſare nella maggiore. Ma, toſtochè l'acqua contenuta nel vase sarà giunta all'altezza Ca, eſſa dovrà paſſare dalla gamba minore nella maggiore, attesa la preſſione, che l'acqua superiore esercita sull'inferiore, e dopo di avervi espulsa tutta l'aria rinchiusa dovrà sortire dal foro N. Principiato che ſia lo scolo dell'acqua, non potrà queſto più ceſſare, se non quando l'eſtremità m della gamba minore mM non sarà più immersa nell'acqua, oſſia poichè l'eſtremità m della gamba minore mM tocca quaſi il fondo CD del vase, se non quando il vase sarà votato di acqua, ſiccome richiede la natura dei ſifoni. Per dare a queſta macchina una cert'aria di miſtero,

ſi può dare al vase un doppio ordine di lati, e nasconder dentro di queſti il ſifone in modo, che l'eſtremità *m* della sua gamba minore abbia comunicazione coll' acqua contenuta nel vase. Ciocchè ec.

PROBLEMA V.

Spiegare, donde avviene, che alcune fontane naturali, che ſi chiamano intermittenti, *ora mandino, ora ceſſino dal mandar l'acqua.*

85. SI supponga, che un canal d'acqua F porti continuamente acqua nel ricettacolo ACDB, ove trovaſi il ſifone naturale *m*MN. L'acqua non potrà scaturire da quello, se non quando la sua altezza sarà C*a*. Si ponga ora, che il ſifone ſia talmente capace, ch' esaurisca tutta l'acqua, che contiene il ricettacolo ſino all' altezza C*a* inſieme con quella, che ivi entro porta inceſſantemente il canale F in un certo tempo, in fine del quale l'eſtremità *m* della sua gamba minore ſia tutta fuori dell'acqua. Ben ſi vede, che dovrà lo scolo dell'acqua per l'eſtremità M della gamba maggiore affatto ceſſare, nè potrà principiare, se non quando l'acqua, che porta il canale dentro il ricettacolo, vi avrà ottenuta l'altezza C*a*. Adunque in queſto caso ſi ha un fonte intermittente, in cui lo scolo dura per tutto quel tem-

po, che mette l'acqua contenuta nel ricettacolo all'altezza C*a* insieme con quella, che ivi porta il canale F di nuovo, ad abbassarsi fino in *m*, e cessa per tutto quell'altro tempo, che mette il canale a riempiere il ricettacolo fino all'altezza C*a*.

Finchè il canale porterà al ricettacolo la stessa quantità di acqua, il tempo sì dello scolo, come anche della cessazione di questo resterà invariato, purchè non succeda nè al ricettacolo, nè al sifone veruna mutazione. Il tempo dello scolo sarà tanto più corto, quanto più grande sarà la capacità del sifone, e l'eccesso dell'altezza della gamba maggiore sopra quella della minore, e quanto minore sarà la quantità dell'acqua, che porta il canale al ricettacolo.

Chiunque rifletterà, che il sifone *m*MN può avere varie forme, posizioni, e capacità: che il ricettacolo può avere varie figure, posizioni, e grandezze: che questo può contenere non solamente uno, ma eziandio più sifoni diversamente capaci, e disposti: che finalmente la quantità dell'acqua, che porta il canale al ricettacolo, può essere ora grande, ora scarsa, ora anche nulla, non si stupirà certamente, se i fenomeni delle fontane intermittenti sieno cotanto varj, e strani. Ciocchè ec.

LIBRO II.

DELLA MISURA DELL' ACQUA FLUENTE DAI FORI DEI VASI.

CAPO I.

Della figura, che prende una vena d' acqua, mentr' esce dal foro di un vase.

86. SE le particelle dell' acqua passassero tutte per il foro del vase secondo la direzione perpendicolare al di lui piano, la vena, mentre sorte dal foro, sarebbe dappertutto egualmente grossa. Ma ben si vede, che non possono esse passar tutte per il foro perpendicolarmente, essendo egli chiaro, che il fluido, che stà ai lati della colonna RMNS (fig. 2.), e che si porta anch' esso in tempo dello scolo al foro (9.), dov'è minore la resistenza, non vi può arrivare, se non con moti differentemente obbliqui, siccome anche c'insegna l'esperienza. Avendo il Sig. Daniele Bernoulli mescolati insieme coll'acqua dei pezzetti di cera di Spagna, affine di poter me-

glio discernere coll'occhio la direzione dei moti dell'acqua, mentre questa se ne sortiva (fig. 10.) dal foro MN del vase ACDB di vetro, offervò, che tutti i pezzetti di cera si dirigevano al foro. Quei, che soprastavano al centro del foro, discendevano per la verticale *Gg*: gli altri scendevano sul principio secondo le direzioni *Ee*, *Ff*, *Gg*, *Hh*, *Ii* sensibilmente verticali, finchè giunti ad una certa distanza dal fondo piegavano a poco a poco le loro verticali, portandosi al foro secondo le rette obblique *e*M, *fr*, *hs*, *i*N. Il Sig. Abate Boffut ha confermate con varj sperimenti le offervazioni del Sig. Daniele, facendo anche sortire l'acqua per un foro posto di fianco al vase, e ha ritrovato di più, che la distanza del fondo dal piano orizzontale, in cui le particelle laterali mutano le loro direzioni verticali in obblique, era in molte sperienze di tre in quattro pollici (fig. 11.).

87. Qual si è dunque la figura, che prende la vena fluida al suo sortire dal foro? La sperienza c'insegna, che la vena fluida, mentre sorte dal foro, prende la forma della piramide tronca M*mn*N (fig. 10.), ristringendosi dalla faccia interiore del fondo fino ad una certa distanza eguale in circa al raggio del foro, dopo della quale essa sempre si dilata, mercè la resistenza dell'aria, che le dà necessariamente maggior volume. Nè ciò ci deve far maraviglia. Imperocchè le particelle, che stanno ai lati della colonna ver-

ticale Gg, che corrisponde al centro del foro, poichè passano per questo secondo le direzioni obblique eM, fr, hs, iN, debbono avvicinarsi fra loro maggiormente, stringersi verso il mezzo, e formare sotto il foro stesso in piccola distanza la sezione più angusta mn della vena contratta. Per la stessa ragione si forma anche la contrazione della vena, allorchè lo scolo si fa per un'apertura laterale. Quì però si deve notare, che, quando il foro è scolpito nel fondo del vase, la restrizione della vena nasce anche in parte dall'accelerazione del moto prodotta dalla gravità, giacchè si sa, che i fluidi anche nelle loro libere cadute si assottigliano, e si ristringono a misura, che acquistano maggior velocità. Ond'è, che, quantunque quest'accelerazione in una distanza sì piccola dal foro non possa produrre, che un piccolissimo effetto, ciò non ostante per iscansarla si fa l'osservazione della minima sezione della vena contratta nei getti orizzontali, dove quella non può sensibilmente influire.

88. Il primo, che osservò la contrazione della vena, è stato il celeb. Alfonso Borelli, siccome si può vedere alla proposizione 216 del suo libro: *De motionibus a gravitate pendentibus*, benchè falsamente ne abbia attribuita la causa alla tenacità dell'acqua. Quegli, che ne ha arrecata la vera cagione, e che ne diede anche la misura, è stato l'immortale Newton. Per mi-

surare la contrazione della vena, che nasce dalla sola convergenza dei moti, egli fece l'esperienza in un foro circolare, e laterale, mentre l'acqua incominciava a sortire orizzontalmente. Il foro stava scolpito in una lastra sottile: il suo diametro era di $\frac{5}{8}$ di un pollice. Presa col compasso la misura del diametro della vena contratta nel suo massimo ristringimento alla distanza di un mezzo pollice dal foro trovò, che l'area del foro stava a quella della minima sezione della vena contratta $= \sqrt{2} : 1 = 141 : 100$ in circa. Dopo il Newton molti altri han presa la misura della massima contrazione della vena con differente successo. Nè ciò ci deve parere strano. Imperocchè è quasi impossibile il non prendere nel misurare il diametro di quella un piccolo errore, che può diventare sensibile nella determinazione dell'area, essendo le aree dei cerchj come i quadrati dei diametri. Nel resto, allorchè lo scolo si fa per un foro scolpito in una sottil lastra, si può senza pericolo di error notabile in tutti gli usi della vita generalmente supporre, che l'area del foro stia all'area della vena nel luogo del suo massimo ristringimento $= 8 : 5$, siccome ha raccolto dalle sue sperienze fatte con somma esattezza il Sig. Ab. Bossut, servendosi per ritrovare quel rapporto del metodo, che si apporterà nel capo seguente, e che in pratica è il più sicuro.

89. La contrazione della vena è stata da al-

cuni celebri Autori riguardata come un effetto puramente accidentale, e che si potesse distruggere affatto, facendo sortire l'acqua per un piccol tubo cilindrico applicato al foro. Al foro nudo MN del vase ACDB pieno di acqua vi si concepisca applicato un tubo cilindrico dello stesso diametro: la vena dell'acqua, che prima dalla faccia interiore del foro MN fino in *mn* andava sempre ristringendosi, ora ricevuta dentro il tubo si gonfia in modo, che ne riempie sensibilmente tutta la cavità, purchè il tubo abbia una certa lunghezza, siccome consta dalle osservazioni dei Sigg. Marchese Poleni, e Abate Bossut. Ma non può diventare la vena fluida sensibilmente cilindrica, ossia sensibilmente dappertutto dello stesso diametro, se non nel caso, che i fili M*m*, N*n*, che prima erano obbliqui al piano del foro MN, e convergenti nella minima sezione *mn*, diventino mediante l'applicazione del tubo sensibilmente perpendicolari allo stesso, e paralleli ai lati del tubo, ossia se non nel caso, che la contrazione della vena non venga sensibilmente distrutta. Sussiste però sempre in parte dentro dei tubi cilindrici la contrazione della vena, quantunque questa sembri distrutta. Per accertarsi basta percuotere leggiermente con una chiave il tubo, mentre vi scorre dentro l'acqua: si vedrà, siccome ha osservato il Sig. Ab. Bossut, che la vena si distaccherà dalle pareti del tubo, e si ridurrà a minor volume; il

che è segno, che la vena fluida, mentre si move lungo un tubo, non lo riempie con esattezza, ossia che i suoi fili di acqua non sono nè esattamente perpendicolari al piano del foro MN, nè esattamente paralleli ai lati del tubo, ossia finalmente, che la contrazione della vena non è intieramente distrutta, ma sussiste in parte. Dalle sperienze del Sig. Abate Bossut consta, che, allorquando si fa lo scolo per un tubo cilindrico di tal lunghezza, che l'acqua vi possa sortire a bocca piena, stà l'area del foro all'area della minima sezione della vena contratta = 16 : 13 in circa.

90. Dalla maniera, con cui si forma la contrazione della vena, s'intende

I. Che, risultando la contrazione della vena $MmnN$ dalla convergenza dei moti obbliqui dell'acqua nello spazio angusto mn, si deve la vena fluida considerare composta di tanti fili d'acqua Mm, Nn ec. convergenti nella minima sezione mn, quante sono le particelle dell'acqua, che in questa si ritrovano. Però la densità della vena $MmnN$ dev'esser minima nel foro MN, massima nella sezione mn, dov'essa ha il suo massimo ristringimento, e media finalmente nelle medie distanze dal foro.

II. Che, se si prescinde dalla piccola accelerazione, che produce la gravità nel moto della vena fluida, quando questa sorte per un foro scolpito nel fondo del vase, deve la velocità

dell' acqua fluente esser la stessa sì nel foro MN, come anche nella minima sezione *mn* della vena contratta, passando per ambedue le sezioni la stessa quantità dell' acqua.

91. L'obbliquità dei moti, con cui le particelle del fluido contenuto si affacciano d'ogn'intorno al foro, fa, che molte di queste non vi passino, essendo egli chiaro, che se le particelle del fluido contenuto nel vase ACDB vi passassero tutte secondo la direzione perpendicolare al piano del foro MN, vi sortirebbe un prisma della stessa densità della minima sezione *mn*, il quale avrebbe per base il foro MN, e per altezza la distanza di questo dalla suddetta sezione *mn*, nello stesso tempo, che vi sorte il cono troncato M*mn*N di varia densità. Quindi, poichè la quantità d' acqua di questo cono è la stessa, che quella di un prisma, che avesse per base la minima sezione *mn*, e per altezza la distanza di questa dal foro MN, ne siegue, che l' obbliquità dei moti produce lo stesso effetto, come se il fluido in vece di sortire dal foro materiale MN sortisse da un altro foro più angusto *mn*, ossia da una sezione uguale al massimo ristringimento della vena. Onde ben si vede

I. Che per calcolare con esattezza la quantità dell' acqua, che effettivamente sorte da un foro in un dato tempo, bisogna sempre riguardare per foro la minima sezione *mn* della vena. Se si prendesse nel fare il calcolo il foro materiale

riale del vase la quantità calcolata troverebbesi maggiore del giusto, e sarebbe quella, che sortirebbe dal foro M N in quel tempo, se tutte le particelle del fluido contenuto vi passassero perpendicolarmente al di lui piano. Quest'ultima quantità per distinguerla dalla fisica, ed attuale chiamasi *razionale*, o *teoretica*.

II. Che, poichè il numero delle particelle dell'acqua, che stà nella sezione del foro M N, è uguale a quello delle particelle dell'acqua, che stà nella minima sezione della vena, deve la percossa, che dall'urto diretto da quella riceve la superficie piana E G (fig. 2.), quando questa si avvicina al foro M N in modo, che sia parallela al fondo orizzontale del vase A C D B, deve, dico, la percossa essere uguale al doppio del peso di una colonna d'acqua, la quale abbia per base la minima sezione della vena contratta, e per altezza quella dell'acqua nel vase, purchè questo venga mantenuto costantemente pieno alla stessa altezza. Egli è chiaro, che, se si farà l'esperienza, dovrassi trovare la misura della percossa minore del doppio peso della suddetta colonna, supponendosi nella dimostrazione (48.), che tutte le particelle dell'acqua, che passa per il foro M N, urtino direttamente nella superficie sottoposta E G, quandochè vi cadono quasi tutte con moti differentemente obbliqui; il che è conforme agli sperimenti fatti dai Sigg. Daniele Bernoulli, e Krafft.

PROBLEMA I.

Spiegare, donde avviene, che i tubi cilindrici applicati alle conserve mandino, ceteris paribus, *più acqua, che i semplici fori.*

92. ABbiam detto di sopra, che, quando ad un foro nudo vi si applica un tubo di egual diametro, l'acqua, che vi entra, si gonfia, e riempie sensibilmente la sua cavità, e che, in virtù di questo rigonfiamento rendendosi i fili, dai quali si concepisce composta la vena fluida, meno obbliqui al piano del foro, si scema la contrazione della vena. Ma, scemandosi questa, si scema anche l'obbliquità dei moti, con cui le particelle del fluido contenuto si presentano d'ogni intorno al foro. Quindi, poichè l'obbliquità di questi moti fa, che molte particelle del fluido contenuto non passino per il foro, ne siegue, che la quantità dell'acqua, che dentro di un dato tempo sorte per un tubo cilindrico di giusta lunghezza, dev'essere maggiore di quella, che nello stesso tempo sotto la stessa profondità sortirebbe per un foro nudo di egual diametro. Ma per qual cagione l'acqua entrando in un tubo cilindrico si gonfia, e riempie sensibilmente tutta la di lui cavità? Pare, che la ragion sia, perchè la vena fluida, dopo di essere arrivata al luogo del suo ristringimento, dilatandosi in maggiore

spazio incontra ben presto le pareti del tubo; il che produce qualche, benchè piccolo ritardo nella velocità delle sue parti anteriori. Laonde, movendosi questo con minor velocità di prima, le altre, che vengono appresso con maggior velocità, ossia con quella velocità, che conviene all'altezza dell'acqua nel vase, si accumulano dentro il tubo quasi nello stesso modo, che succede all'acqua di un fiume, la quale, se incontra nel suo corso qualche impedimento, si accumula avanti di questo, sollevando la sua superficie a maggiore altezza. Ciocchè ec.

93. *Coroll.* I. Si ponga la lunghezza del tubo cilindrico applicato minore, oppure uguale alla lunghezza della vena fluida dalla faccia interiore del foro fino alla sua massima contrazione. Egli è chiaro, che, non potendosi gonfiare dentro di una vena fluida, deve la quantità dell'acqua fluente essere eguale a quella, che dentro lo stesso tempo sotto la stess' altezza manderebbe un nudo foro di egual diametro. Da ciò ne siegue, che, affinchè possa un tubo mandare dentro di un dato tempo, e sotto la stessa profondità più acqua, che un foro nudo, dev'esso avere una lunghezza maggiore di quella della vena fluida dalla faccia interiore del foro fino al suo massimo ristringimento.

94. *Coroll.* II. Si ponga ora la lunghezza del tubo cilindrico maggiore. Ben si vede, che, se questa lunghezza è troppo grande, lo sfregamento eccessivo, che la vena fluida, mentre oltre

il suo maſſimo riſtringimento ſi dilata in maggiore spazio, patisce colle interne pareti del tubo, deve scemare notabilmente la di lei velocità; e quindi anche la quantità dell'acqua fluente, non oſtante l'ingroſſamento, che ne risulta nella vena. Ma se la lunghezza è troppo piccola, lo sfregamento troppo piccolo non ritarda, quanto baſta al gonfiamento della vena, la velocità delle particelle anteriori di queſta. Avvi dunque nella lunghezza del tubo una lunghezza propria a produrre il più grande poſſibile scolo.

95. *Coroll.* III. Si vede, che allora, quando l'acqua sorte da un tubo cilindrico a bocca piena, la quantità attuale dell'acqua fluente è minore della razionale sì per la contrazione della vena, come anche per la reſiſtenza, che incontra dalle pareti del tubo la parte anteriore della ſteſſa vena, quantunque queſte due cause unite aſſieme scemino la quantità dell'acqua fluente meno, che la sola contrazione della vena nei fori nudi.

96. *Scolio*. L'area della minima sezione della vena contratta, la quale, ſiccome abbiam detto, ſi deve ſoſtituire al foro materiale del vase nel calcolo sì della quantità dell'acqua fluente, come anche della percoſſa, ch'eſſa fa, allorchè cade in una piana superficie, ſi ritrova in queſto modo. Nella ipoteſi che lo scolo ſi faccia per un foro scolpito in una sottile laſtra, ſtà l'area del foro all'area della minima sezione della vena contratta $= 8 : 5$ (88.). Onde, chiamata f

l'area del foro del vase, se si farà $8 : 5 = f : x$, si troverà l'area x della minima sezione della vena $= \frac{5}{8} f$. Nello stesso modo si ritrova l'area della minima sezione della vena contratta nel caso, che lo scolo si faccia per un tubo cilindrico di tal lunghezza, che l'acqua ne sorta a bocca piena, $= \frac{13}{16} f$.

PROBLEMA II.

Determinare la figura da darsi ad un tubo, perchè possa somministrare la più grande possibile quantità d'acqua in un dato tempo sotto la data profondità.

97. Sia MN il foro del vase ACDB (fig. 10.), $MmnN$ la vena dell'acqua fluente, CA l'altezza dell'acqua interiore al di su del foro. Si ponga poscia, che Mm, Nn divengano le pareti di un tubo $MmnN$ della stessa figura, lunghezza, ed ampiezza della vena d'acqua, le quali tocchin questa senza apportare verun impedimento al di lei moto. Egli è chiaro, che l'acqua, ch'esce attualmente dal foro mn del tubo $MmnN$, ha tutta la sua pienezza possibile, ossia non è diversa dalla razionale, avendo l'acqua, che riempie il foro mn la sua densità naturale (90.), e la velocità, che conviene all'altezza CA dell'acqua nel vase sopra il centro del foro mn (90.). Si

vede adunque, che per avere la massima possibile quantità d'acqua bisogna dare al tubo la figura, che prende la vena, allorchè sorte da un foro scolpito in una sottil lastra. Ciocchè ec.

98. *Scolio*. Nella costruzione del tubo si deve notare, che l'area $mn = \frac{5}{8}$ dell'area del foro MN in circa: che la distanza di mn dal foro $MN = \frac{1}{2}$ della larghezza dello stesso foro in circa: che finalmente i lati $MmnN$ sono sensibilmente retti. Questo Problema può essere di qualche vantaggio, quando si tratta di derivare da un canale, o acquidotto una certa quantità di acqua per un condotto laterale.

CAPO II.

Della misura dell' acqua, che sorte dentro di un dato tempo da un piccol foro scolpito nel fondo, oppure in uno dei lati di un vase mantenuto costantemente pieno.

99. LA quantità dell'acqua fluente può essere, siccome abbiamo detto della velocità (38.), *assoluta*, o *relativa*. Quella si ha, quando si sa il numero dei pollici cubici, che conviene in un dato tempo all'acqua fluente, data essendo l'area del foro, e l'altezza dell'acqua nel vase sopra il foro. Questa si ha, quando si sa il rapporto della quantità dell'acqua, che sorte dal foro di

un vase, alla quantità dell'acqua, che sorte dal foro di un altro vase. La quantità relativa dell' acqua fluente si ricava facilmente dall'assoluta, e serve anche, quando si tratta di ritrovare l'assoluta per via della sola sperienza; il che non è di piccolo vantaggio in alcuni casi.

PROBLEMA I.

Date tre di queste quattro cose, la quantità cioè dell'acqua fluente, l'area del foro, l'altezza costante dell'acqua nel vase sopra il foro, il tempo finalmente, in cui dura lo scolo, ritrovare la quarta.

100. I. Sia data l'altezza costante AC (fig. 2.) dell'acqua nel vase ACDB, il piccol foro MN, per cui sorte l'acqua, e il tempo, in cui dura lo scolo. Si dimanda la quantità assoluta sì razionale, come attuale dell'acqua fluente? Si chiami a l'altezza costante dell'acqua nel vase ACDB sopra il foro MN, v la velocità dell'acqua fluente, t il tempo, in cui dura lo scolo, f l'area del foro MN, Q finalmente la quantità razionale dell'acqua. Poichè l'altezza AC dell'acqua nel vase ACDB si suppone costantemente la stessa, sarà, durante il tempo t, la velocità dell' acqua fluente uniforme. Quindi la quantità razionale Q dell'acqua fluente sarà eguale ad un

prisma di acqua, il quale abbia per base l'area f del foro MN, e per altezza lo spazio vt, che un corpo mosso equabilmente colla velocità v dell'acqua fluente descriverebbe nel tempo t, in cui dura lo scolo, ossia sarà $Q = fvt$. Ora $v = \sqrt{a \cdot 2g}$ (39.). Perciò, fatta la sostituzione, si avrà $Q = ft\sqrt{a \cdot 2g}$. Affine di ritrovare la quantità attuale dell'acqua fluente, bisogna al foro materiale f del vase sostituire la minima sezione della vena contratta (91.). Adunque nell'ipotesi, che lo scolo si faccia per un foro scolpito in una sottile lastra, chiamata Q' la quantità attuale dell'acqua fluente, deve esser $Q' = \frac{5}{8}ft\sqrt{a \cdot 2g}$; nell'ipotesi poi, che lo scolo si faccia per un tubo cilindrico talmente lungo, che l'acqua vi possa sortire a bocca piena, posta Q'' la quantità attuale dell'acqua fluente, deve esser $Q'' = \frac{13}{16}ft\sqrt{a \cdot 2g}$, essendo nel 1.° caso l'area della minima sezione della vena contratta $= \frac{5}{8}f$, nel 2.° $= \frac{13}{16}f$ (95.).

II. Data la quantità attuale Q' dell'acqua fluente, l'altezza costante a dell'acqua nel vase, il tempo t dello scolo, si cerca l'area f del foro? Essendo $Q' = \frac{5}{8}ft\sqrt{a \cdot 2g}$, dev'esser $f = \frac{8Q'}{5t\sqrt{a \cdot 2g}}$

III. Date le quantità Q', a, f, si dimanda il tempo t dello scolo? Dev'esser $t = \frac{8Q'}{5f\sqrt{a \cdot 2g}}$

IV. Date le quantità Q', f, t, si dimanda l'altezza dell'acqua nel vase? Dev'esser $a = \frac{64 Q'^2}{25 f^2 t^2 . 2g}$, essendo $Q' = \frac{5}{8} f t \sqrt{a . 2g}$; e però $\frac{8 Q'}{5 f t} = \sqrt{a . 2g}$; e quindi anche $\frac{64 Q'^2}{25 f^2 t^2} = a . 2g$; e per fine $a = \frac{64 Q'^2}{25 f^2 t^2 . 2g}$. Ciocchè ec.

101. *Scolio* I. Se invece della quantità Q' fosse data la quantità Q, oppure Q'', si troverebbe la soluzione delle tre ultime dimande nello stesso modo, facendo uso nel 1.° caso dell'equazione $Q = f t \sqrt{a . 2g}$, nel 2.° dell'altra $Q'' = \frac{11}{16} f t \sqrt{a . 2g}$.

Esempio I. L'altezza AC dell'acqua nel vase ACDB è di 4 piedi, il diametro del foro circolare MN scolpito nel di lui fondo CD è di $\frac{1}{2}$ di un pollice parigino: si dimanda il peso dell'acqua, che deve somministrare quel foro in un minuto primo nell'ipotesi, che il vase venga mantenuto costantemente pieno di acqua a quella stessa altezza? Si cerchi l'area f del foro MN: si troverà $f = \frac{11}{56}$ di un pollice quadr., posta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7 : 22$. Quindi, essendo inoltre $t = 60$ secondi, $a = 4$ piedi $= 48$ pollici, $2g$ finalmente $= 724$ pollici parigini, fatta la sostituzione dei valori ritrovati al luogo delle lettere nell'equazione $Q' = \frac{5}{8} f t$

$\sqrt{a \cdot 2g}$, si avrà $Q' = \frac{5}{8} \cdot \frac{11}{30} \cdot 60 \cdot \sqrt{48 \cdot 724}$ $= 1370$ pollici cubici di acqua in circa. Il Sig. Ab. Boſſut, avendo fatta l'esperienza, ha cavati 1353 pollici cubici di acqua, quantità, come ſi vede, pochiſſimo differente dalla calcolata. Per ritrovare il peso dei 1370 pollici cubici di acqua bisogna procedere in queſto modo. Eſſendo il peso di un piede cubico, oſſia di 1728 pollici cubici di acqua $= 70$ libbre parigine, ſi avrà il peso di 1370 poll. cubici, facendo queſta proporzione $1728 : 1370 = 70 : x$, e sarà x, oſſia il peso di 1370 pollici cubici di acqua $= 55 + \frac{1}{2}$ libb. parigine. Il peso dei 17 pollici cubici, che coſtituiscono la differenza tra la vera, e la calcolata quantità dell'acqua fluente, è di 11 once parigine in circa, oſſia è quaſi di due terzi di una libbra.

Esempio II. Da un foro scolpito nel fondo di un vase mantenuto coſtantemente pieno di acqua all'altezza AC di 4 piedi, oſſia di 48 pollici sopra il foro ſi son cavati in un minuto primo 1370 pollici cubici in circa. Si dimanda il diametro del foro? Si cerchi sul principio l'area del foro. Poichè $Q' = 1370$ pollici cubici, $a = 48$ pollici, $t = 60$ secondi, $2g = 724$ pollici, meſſi queſti valori al luogo delle lettere corrispondenti nella equazione $f = \frac{8Q'}{5t\sqrt{a \cdot 2g}}$, ſi avrà $f = \frac{8 \cdot 1370}{5 \cdot 60 \cdot \sqrt{48 \cdot 724}} = \frac{11}{16}$ di un pollice

quadrato in circa. Ora affine di ritrovare il diametro di quest' aria circolare si proceda in questo modo. Si chiami x il diametro incognito dell' area f: sarà, posta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7:22$, la circonferenza dell'area $= \frac{22}{7}x$, e l' area finalmente $f = \frac{22}{7}x \cdot \frac{1}{4}x = \frac{22}{28}x^2$. Ma si è, siccome abbiam ritrovato, l' area $f = \frac{11}{56}$ di un pollice quadrato. Perciò si avrà $\frac{11}{56} = \frac{22}{28}x^2$, ossia $x^2 = \frac{11 \cdot 28}{56 \cdot 22} = \frac{1}{4}$, e finalmente $x = \frac{1}{2}$ di un pollice.

102. *Scolio* II. Quando l'acqua sorte da un tubo cilindrico senza riempierlo, ossia senza seguire le di lui interne pareti, la quantità dell'acqua, che sorte dentro di un dato tempo, è quasi la stessa, che quella, che sortirebbe dentro lo stesso tempo sotto la stessa profondità da un nudo foro di egual diametro. Essendo l' altezza costante dell' acqua nella conserva al di sopra della base superiore di un tubo addizionale verticale, ossia situato al fondo, e della lunghezza di due pollici, essendo, dico, l'altezza di 552 linee, ha osservato il Sig. Ab. Bossut, che, quando l' acqua usciva da quel tubo di 6, di 10 linee di diametro a bocca piena, la quantità dell'acqua somministrata in un minuto era di 1689, di 4703 pollici cubici, mentrechè era soltanto di 1293, di 3598, allorchè l'acqua non seguiva le pareti del tubo. Similmente essendo la suddetta altezza di 288 linee, ha egli osservato, che nel 1.° caso la quantità dell' acqua somministrata nello stesso

tempo era di 1222 di 3402, mentre nell' altro era soltanto di 935, di 2603. Paragonando fra loro le quantità dell'acqua fluente Q'', Q''', dei tubi dello stesso diametro, allorchè l' acqua esce a bocca piena, e allorchè si distacca dalle pareti, sotto la stess'altezza dell' acqua nella conserva, si hanno le seguenti proporzioni.

$$Q'' : Q''' = 1689 : 1293$$
$$Q'' : Q''' = 4703 : 3598$$
$$Q'' : Q''' = 1222 : 935$$
$$Q'' : Q''' = 3402 : 2603$$

La seconda ragione di ciascuna di queste quattro proporzioni è presso a poco eguale alla ragione di 13 : 10. Si può adunque negli usi della vita supporre senza pericolo di error notabile, che stia $Q'' : Q''' = 13 : 10$. Però la quantità dell' acqua, che manda un tubo cilindrico, allorchè l' acqua non siegue le di lui pareti, ossia $Q''' = \frac{10}{13} Q'' = \frac{10}{13} . \frac{13}{16} ft\sqrt{a . 2g}$ (100.) $= \frac{5}{8} ft\sqrt{a . 2g}$, eguale cioè a quella, che manderebbe nello stesso tempo sotto la stessa profondità un nudo foro di egual diametro.

PROBLEMA II.

Data l' altezza costante dell' acqua in un vase, il tempo, in cui dura lo scolo, l' area finalmente del foro, ritrovare la quantità dell' acqua, che resta in tutto quel tempo impedita, mediante l' obbliquità dei suoi moti, dall' uscire dal foro.

103. Si chiami q' la quantità di quest' acqua impedita. Se l'acqua vi sortisse dal foro in modo, che le direzioni dei suoi fili fosser tutte perpendicolari al di lui piano, la quantità dell'acqua fluente sarebbe la razionale, ossia sarebbe $= ft \sqrt{a.2g}$ (100.). Ma, poichè vi sorte realmente con moti obbliqui al piano del foro, la quantità dell'acqua attualmente espulsa non può essere, se non $= \frac{5}{8} ft \sqrt{a.2g}$ (100.) nell'ipotesi, che lo scolo si faccia per un nudo foro. Egli è chiaro, che dev' esser $q' = ft \sqrt{a.2g} - \frac{5}{8} ft \sqrt{a.2g} = \frac{3}{8} ft \sqrt{a.2g}$. Adunque, poichè è data la costante altezza a dell' acqua nel vase, il tempo t, in cui dura lo scolo, e l' area f del foro, si cerchi la quantità razionale dell' acqua fluente, ossia $Q = ft \sqrt{a.2g}$, e si prendano poscia tre ottave di questa quantità. Si avrà in questo modo la quantità dell' acqua, che nel tempo t resta, attesa l' obbliquità dei suoi moti, impedita dall' uscire dal foro, essendo $q' = \frac{3}{8} ft \sqrt{a.2g}$. Quando l' acqua sorte per un tubo cilindrico a bocca piena, allora la quantità dell' acqua impedita, ossia $q'' = \frac{3}{16} ft \sqrt{a.2g}$. Per esempio la quantità razionale dell' acqua fluente in un minuto per un nudo foro circolare del diametro di un pollice sotto la profondità costante di 9 piedi è di 13144 poll. cubici. Onde la quantità q' dell'

acqua, che resta in quel tempo impedita dal sortire, attesa l'obbliquità dei suoi moti, deve esser $= \frac{3}{8} . 13144 = 4939$ pollici cubici in circa. Ciocchè ec.

PROBLEMA III.

Ritrovare la ragione dell'area del foro all'area della vena nel suo massimo ristringimento.

104. Si prenda la misura dell'area F del foro del vase. Si cerchi poscia con tutta l'esattezza la quantità dell'acqua, che attualmente manda quel foro in un tempo t, mantenendo sempre il vase pieno alla stess'altezza a. Egli è chiaro, che, chiamata f l'area della sezione della vena nella sua massima contrazione, dev'esser la quantità dell'acqua Q' espulsa dal foro F nel tempo t sotto la costante altezza $a = ft\sqrt{a . 2g}$. Si cerchi inoltre la quantità razionale dell'acqua, che sarebbe stata espulsa dallo stesso foro nello stesso tempo, e sotto la stess'altezza, se l'acqua vi fosse passata perpendicolarmente al piano del foro: sarà questa $= Ft\sqrt{a . 2g}$. Si paragoni ora quest'ultima quantità colla prima: sarà Q: Q' $= Ft\sqrt{a . 2g} : ft\sqrt{a . 2g} = F : f$. Quindi se si cercherà la ragione della quantità razionale all'attuale dell'acqua fluente, si avrà la ragione

dell'area del foro all'area della minima sezione della vena contratta, essendo questa ragione eguale all'altra. Per esempio la quantità razionale dell'acqua, che manderebbe in un minuto un foro circolare di un pollice di diametro alla profondità di 9 piedi di acqua nel vase, è $=$ 13144 pollici cubici, siccome abbiam detto. Ora l'esperienza c'insegna, che la quantità dell'acqua, che attualmente manda quel foro in un minuto sotto quell'altezza, è soltanto $=$ 8135 pollici cubici. Però la ragione dell'area del foro all'area della minima sezione della vena contratta dev'esser $= 13144 : 8135$. Questa ragione è poco differente da quella di $8 : 5$. Quindi se si farà $8 : 5 = F : x$, si troverà anche l'area x della minima sezione della vena $= \frac{5}{8} F$. Nello stesso modo si trova, che anche ità, quando lo scolo si fa per un tubo cilindrico talmente lungo, che l'acqua possa sortire a bocca piena, $Q : Q'' = F : f$, e che quindi, poichè $Q : Q' = 16 : 13$ sensibilmente, siccome consta dalla sperienza, deve anche stare $F : f = 16 : 13$; e perciò finalmente l'area assoluta della minima sezione in questo caso dev'esser $= \frac{13}{16} F$. Ciocchè ec.

105. *Scolio*. In questo modo il Sig. Abate Bossut ha determinato il suddetto rapporto. Si deve però confessare, che nè anche in questa guisa si può ritrovarlo con esattezza, giacchè la quantità attuale dell'acqua fluente è minore della

razionale non solamente per la contrazione della vena, ma eziandio per la resistenza, che proviene dal mutuo fregamento dell'acqua coll'orlo del foro. Per questa stessa ragione non si può con tutta esattezza ritrovare la quantità dell'acqua, che resta impedita dall'uscita del foro per l'obbliquità dei suoi moti, dovendosi la parte ritrovata non solamente all'obbliquità del moto, ma ancora allo sfregamento. Ma la resistenza, che proviene dallo sfregamento, è piccola cosa, principalmente se il foro non è molto piccolo, siccome si vedrà a suo luogo. Ecco i risultati delle sperienze del soprammentovato Autore fatte colla massima possibile accuratezza rispetto allo scolo dell'acqua per un nudo foro, giacchè abbiamo apportate le altre dello stesso riguardo allo scolo dell'acqua per gli tubi addizionali. In queste sperienze i fori erano scolpiti perpendicolarmente in lastre di rame di una mezza linea incira di grossezza. I tempi degli scoli per ciascuna esperienza sono ridotti a un minuto di tempo.

Altezza costante dell'acqua al di sopra del centro di ciascun orifizio = 11 piedi, 8 pollici, 10 linee.

Espe-

Esperienze.

	Pollici cubici somministrati in un minuto.
I. Da un foro circolare, ed orizzontale di 6 linee di diametro.	2311
II. Da un foro circolare, ed orizzontale di 1 pollice di diametro.	9281
III. Da un foro come sopra di 2 pollici di diametro.	37203
IV. Da un foro rettangolare, ed orizzontale lungo 1 pollice, largo tre linee.	2933
V. Da un foro orizzontale, e quadrato di 1 pollice per lato.	11817
VI. Da un foro orizzontale, e quadrato di 2 pollici per lato.	47361
Altezza costante = 9 piedi.	
VII. Da un foro laterale, e circolare di 6 linee di diametro.	2018
VIII. Da un foro come sopra di 1 pollice di diametro.	8135
Altezza costante = 4 piedi.	
IX. Da un foro laterale, e circolare di 6 linee di diametro.	1353
X. Da un foro come sopra di 1 pollice di diametro.	5436
Altezza costante = 7 linee.	
XI. Da un foro come sopra di 1 pollice di diametro.	628

PROBLEMA IV.

Data la quantità dell' acqua, che attualmente sorte in un dato tempo da un dato foro di un vase mantenuto costantemente pieno alla stess' altezza, ritrovare la velocità assoluta dell' acqua fluente.

106. Il Sig. Ab. Bossut, avendo mantenuta l'acqua in un vase costantemente alla stess' altezza, ha ricavati in un minuto dal di lui foro di 1 pollice di diametro 8135 pollici cubici di acqua. Si dimanda la velocità assoluta dell'acqua fluente? Poichè nell' equazione $Q' = \frac{5}{8} ft\sqrt{a.2g}$ la quantità $\sqrt{a.2g}$ è la misura della velocità assoluta dell'acqua fluente (39.), ossia poichè $\sqrt{a.2g} = v$, sostituita questa quantità al luogo dell' altra nell' equazione di sopra, si avrà $Q' = \frac{5}{8} ftv$, e quindi $v = \frac{8Q'}{5ft}$. Ora si cerchi l'area f del foro del vase: essendo il diametro di questo $= 1$ pollice, si troverà l'area $f = \frac{11}{14}$ di un pollice quadrato, posta la ragione del diametro alla circonferenza $= 7 : 22$. Adunque, poichè $Q' = 8135$ pollici cubici, $f = \frac{11}{14}$ di un pollice quadrato, $t = 60$ secondi, deve esser, fatta la sostituzione, $v = \frac{8.14.8135}{5.11.60} =$

276 pollici in circa = 23 piedi parigini in un secondo. L'altezza dell'acqua nel vase, da cui sono stati cavati in un minuto 8135 pollici cubici, era di 9 piedi. Se si cercherà la velocità assoluta dell'acqua, che conviene a quell'altezza, facendo uso dell'equazione $v = \sqrt{a \cdot 2g}$ (39.), essa si troverà quasi niente diversa dalla già ritrovata. Ciocchè ec.

107. *Scolio*. Questo si è il metodo, che sul principio han giudicato gl'Idraulici il più sicuro per accertarsi della verità della scoperta del Torricelli (7.), paragonando cioè la velocità in tal modo ritrovata colla velocità, che acquisterebbe un grave, cadendo liberamente dall'altezza del fluido contenuto sopra il foro. Ma, poichè essi nel ritrovare la velocità dell'acqua fluente non avean riguardo alla contrazione della vena, le velocità ritrovate risultavano assai minori di quelle dei corpi gravi, siccome ben si vede, facendo uso dell'equazione $v = \frac{Q}{ft}$.

Quindi è, che pareva ad essi, che l'esperienza fosse contraria alla legge Torricelliana, secondo cui si fa l'accelerazione dell'acqua fluente, quantunque l'osservazione sull'altezza, alla quale salgono i getti verticali, la mettesse fuori d'ogni controversia. Il primo, che credette, che nel calcolo della quantità dell'acqua fluente si dovesse al foro materiale del vase sostituire la mi-

nima sezione della vena contratta, è stato l' incomparabile Newton.

PROBLEMA V.

Date in due diversi vasi pieni costantemente di acqua le aree dei fori, le altezze dell' acqua contenuta sopra di ciascun di essi, il tempo finalmente dello scolo per ciascun degli stessi, ritrovare i rapporti delle quantità dell' acqua fluente.

108. Sianvi due vasi V, v costantemente pieni di acqua, le aree dei loro fori si dicano F, f, le altezze dell'acqua contenuta sopra di essi A, a, i tempi, in cui durano gli scoli, T, t, le quantità finalmente razionali delle acque fluenti Q, q. Si avrà $Q = FT\sqrt{a.2g}$, $q = ft\sqrt{a.2g}$. Onde, paragonando l'una coll'altra quantità, si avrà $Q:q = FT\sqrt{A.2g}:ft\sqrt{a.2g} = FT\sqrt{A}:ft\sqrt{a}$. La stessa proposizione si ha, anche quando si tratta delle quantità attuali delle acque fluenti o per li fori nudi, o per li tubi cilindrici di sufficiente lunghezza, essendo nel 1.° caso $Q':q' = \frac{5}{8}FT\sqrt{A.2g} : \frac{5}{8}ft\sqrt{a.2g} = FT\sqrt{A} : ft\sqrt{a}$; nel 2.° poi $Q'':q'' = \frac{13}{16}FT\sqrt{A.2g} : \frac{13}{16}ft\sqrt{a.2g} = FT\sqrt{A}:ft\sqrt{a}$. Si può adunque stabilire, che le quantità delle acque fluenti

dai fori dei vasi sono fra loro in ragione composta delle aree dei fori, delle radici delle altezze dell'acqua contenuta sopra dei fori, e dei tempi, in cui dura lo scolo. Ciocchè ec.

109. *Coroll.* I. Se i fori dei vasi sono circolari, ai luoghi delle quantità F, f si possono mettere i quadrati dei loro diametri, ossia, chiamati i diametri D, d, si posson mettere D^2, d^2, essendo le aree circolari proporzionali ai quadrati dei loro diametri, siccome c'insegna la Geometría. La proporzione adunque superiore si riduce in questo caso alla presente $Q:q = D^2 T \sqrt{A} : d^2 t \sqrt{a}$. Si può anche, chiamati i raggi dei fori circolari R, r al luogo della ragione $D^2 : d^2$ metter quest' altra $R^2 : r^2$, e quindi avere $Q : q = R^2 T \sqrt{A} : r^2 t \sqrt{a}$.

110. *Coroll.* II. Le quantità delle acque fluenti sono eguali, 1.° quando $F T \sqrt{A} = f t \sqrt{a}$, non potendo nella proporzione $Q : q = F T \sqrt{A} : f t \sqrt{a}$ esser $F T \sqrt{A} = f t \sqrt{a}$, se non posto $Q = q$: 2.° quando $F : f = t \sqrt{a} : T \sqrt{A}$, oppure quando $T : t = f \sqrt{a} : F \sqrt{A}$, oppure finalmente quando $\sqrt{A} : \sqrt{a} = f t : F T$, essendo in tutti questi casi $F T \sqrt{A} = f t \sqrt{a}$, siccome consta, facendo in ciascuna proporzione il prodotto dei termini medj, ed estremi fra loro; e perciò anche $Q = q$.

111. *Scolio*. La dottrina di questo Problema ha in pratica sufficiente esattezza. Facciamone l'esame. Quando i tempi, in cui dura lo scolo,

sono eguali, e le altezze delle acque nei vasi al di sopra dei fori sono anche eguali, le quantità delle acque fluenti dai fori circolari debbono essere come i quadrati dei diametri di questi, siccome facilmente si raccoglie dal Coroll. I. Si prendano le esperienze II., e III. (105.), dove i fori circolari sono di 1, di 2 pollici di diametro sotto la costante altezza di 11 piedi, 8 pollici, 10 linee, e dove le quantità d'acqua attualmente somministrate in un minuto sono 9281, 37203 pollici cubici. Si troverà, che stà 9281 : 37203 = 1 : 4 presso a poco, vale a dire nella ragione dei quadrati dei diametri dei fori. Parimente, quando sotto la stess' altezza di 552 linee l'acqua sorte a bocca piena da due tubi cilindrici, le quantità in un minuto somministrate da due tubi, uno di 6, l'altro di 10 linee di diametro sono fra loro sensibilmente come i quadrati dei diametri, stando 1689 : 4703 = 36 : 100 sensibilmente (102.). Supponiamo ora le aree dei fori eguali. In questo caso le quantità d'acqua somministrate debbono esser fra loro come le radici delle altezze, siccome facilmente si raccoglie dallo stesso Corollario. Paragonati i risultati dell'ottava, e decima esperienza (105.), dove le altezze delle conserve sono 9, 4 piedi, si trova, che i pollici cubici di acqua somministrati in un minuto da due fori di un pollice di diametro, vale a dire 8135, 5436 sono fra loro sensibilmente nel rapporto di 3 : 2, ossia nel rap-

porto delle radici delle respettive altezze. Nello stesso modo si trova (102.), che, quando l'acqua esce a bocca piena da due tubi cilindrici ambedue di 6 linee di diametro sotto le profondità di 552, di 288 linee, i pollici cubici di acqua somministrati in un minuto, ossia 1689, 1222 sono sensibilmente come le radici delle respettive altezze 552, 288, ossia come $23 + \frac{5}{10} : 17$. Si vede da ciò, che il Problema ha in pratica sufficiente esattezza non solamente riguardo allo scolo dell' acqua per li fori fatti in sottili lastre, ma eziandio per li tubi addizionali cilindrici. Qui però giova avvertire, che il paragone corre soltanto o tra le quantità delle acque fluenti per li fori nudi, o tra quelle delle acque fluenti per li tubi, se ben si considera la soluzione del Problema. Se l'acqua sortisse dal vase V per un foro nudo, e dall'altro v per un tubo cilindrico, la proporzione, che si avrebbe da fare, sarebbe $Q' : q'' = \frac{5}{8} FT\sqrt{A} : \frac{13}{16} ft\sqrt{a}$.

C A P O III.

Della maniera di ritrovare la misura dell' acqua fluente da un piccol foro scolpito o nel fondo, o in uno dei lati di un vase per la sola via della sperienza, e dei principali Problemi spettanti alla misura dell' acqua.

112. La quantità assoluta dell' acqua fluente si può anche ritrovare per la via della sola spe-

rienza, ficcome abbiam già avvertito. Quefta via fi fonda in parte sulla dottrina dei rapporti, che hanno fra loro le quantità delle acque fluenti, e in parte sull'esperienza. Può far le veci di queft' ultima la Tavola, che fiegue, delle quantità assolute sì razionali, come attuali delle acque fluenti, ftata dal Sig. Ab. Boffut compofta parte col mezzo della sperienza, parte col mezzo della dottrina del Capo precedente. La Tavola, come ognun vede, confta di quattro colonne A, Q, Q′, Q″. La 1.ª A esprime in piedi parigini le altezze coftanti dell' acqua nella conserva al di sopra del foro: la 2.ª Q esprime in pollici cubici la quantità razionale dell'acqua, che pafferebbe in un minuto per un foro di un pollice di diametro sotto le rispettive altezze della colonna A: la 3.ª Q′ esprime in pollici cubici la quantità attuale dell'acqua, che paffa nello fteffo tempo, e sotto le fteffe altezze per un foro nudo dello fteffo diametro: la 4.ª finalmente Q″ esprime come sopra quella, che manda a bocca piena nello fteffo tempo, e sotto le fteffe altezze un tubo cilindrico di un pollice di diametro, e di due pollici di lunghezza. Ecco la

TAVOLA

Della quantità tanto razionale, quanto attuale dell' acqua, che passa per un foro di un pollice di diametro sotto differenti profondità in un minuto, espressa in pollici cubici.

A	Q	Q'	Q''
1	4381	2722	3539
2	6196	3846	5002
3	7589	4710	6126
4	8763	5436	7070
5	9797	6075	7900
6	10732	6654	8654
7	11592	7183	9340
8	12392	7672	9975
9	13144	8135	10579
10	13855	8574	11151
11	14530	8990	11693
12	15180	9384	12205
13	15797	9764	12699
14	16393	10130	13177
15	16968	10472	13620.

PROBLEMA I.

Date tre di queste quattro cose, la quantità cioè dell' acqua fluente, l' area del foro, l' altezza costante dell' acqua nel vase sopra il foro, il tempo finalmente dello scolo,

ritrovare la quarta per la via della sola sperienza.

113. I. Si supponga, che l'altezza dell'acqua nel vase al di sopra del foro sia di $9 + \frac{1}{2}$ piedi, il diametro del foro circolare sia di $1 + \frac{1}{3}$ pollici, ossia di 16 linee. Si dimanda la quantità dell'acqua, che quel foro deve somministrare in 4 minuti? Si cerchi nella Tavola la quantità attuale Q' dell'acqua, che in un minuto somministra un foro di un pollice, ossia di 12 linee di diametro alla profondità di 9 piedi: sarà essa di 8135 pollici cubici. Ora, quando i fori sono circolari, come qui si suppongono, le quantità delle acque fluenti nello stesso tempo da differenti fori sotto differenti altezze sono fra loro in ragion composta dei quadrati dei diametri, e delle radici delle altezze, siccome facilmente si raccoglie dal Coroll. I. del Problema precedente (109.). Adunque se si farà $12.12.\sqrt{9}$ piedi: $16.16.\sqrt{9+\frac{1}{2}}$ piedi $= 8135 : x$, ossia se si farà $144. 3 : 256 \frac{28}{9}$ in circa $= 8135 : x$, si troverà x, ossia la quantità dell'acqua, che somministra un foro di 16 linee di diametro alla profondità di $9 + \frac{1}{2}$ piedi in un minuto, $= \frac{8135. 256. 28}{144. 3. 9}$ pollici cubici. Si moltiplichi ora questo numero per 4: si avrà la quantità ricercata

d' acqua, che quel foro sotto la data profondità somministra in 4 minuti, $= \frac{4 \cdot 8135 \cdot 256 \cdot 28}{144 \cdot 3 \cdot 9}$ $= 59991$ poll. cubici.

II. Da un vase mantenuto costantemente pieno all'altezza di $11 + \frac{1}{2}$ piedi si son cavati in 8 minuti per un foro nudo circolare scolpito nel fondo 132784 pollici cubici di acqua. Si dimanda il diametro del foro? Poichè il foro somministra, siccome si suppone, in 8 minuti 132784 pollici cubici di acqua, sarà la quantità, ch' esso dà in un sol minuto, $= \frac{1}{8}\ 132784 =$ 16598 poll. cub. Si chiami x il suo diametro, e si cerchi nella Tavola la quantità d'acqua, che un foro di un pollice di diametro, ossia di 12 linee di diametro somministra in un minuto alla profondità di 11 piedi. Sarà questa quantità $=$ 8990 pollici cubici. Onde, se si farà (109.) $12 . 12 . \sqrt{11}$ piedi: $x . x . \sqrt{11 + \frac{1}{2}}$ piedi $= 8990$: 16598, ossia se si farà $144 . \frac{11}{10} : x^2 . \frac{24}{7} = 8990$: 16598, si avrà $x^2 = \frac{16598 \cdot 144 \cdot 33 \cdot 7}{8990 \cdot 24 \cdot 10}$; e quindi $x = V\left(\frac{16598 \cdot 144 \cdot 33 \cdot 7}{8990 \cdot 24 \cdot 10}\right) = 16$ linee in circa.

III. Un vase, essendosi mantenuto costantemente pieno all'altezza di 25 piedi, ha somministrato per un foro di 16 linee di diametro 192832 pollici cubici di acqua. Si dimanda il

tempo, in cui ha durato lo scolo? Si cerchi prima, siccome abbiamo fatto nel 1.° esempio di questo Problema, la quantità d'acqua, che deve somministrare il dato foro alla data profondità in un sol minuto. Si troverà questa quantità $= \frac{8135 . 256 . 5}{144 . 3}$ pollici cubici, scegliendo dalla Tavola la quantità attuale dell'acqua, che conviene alla profondità di 9 piedi. Quindi, essendo le quantità d'acqua, che lo stesso foro alla stessa profondità somministra in tempi diversi, come i tempi, in cui dura lo scolo (109.), se si farà $\frac{8135 . 256 . 5}{144 . 3} : 192832 = 1 : x$, si avrà x, ossia il tempo ricercato $= \frac{192832 . 144 . 3}{8135 . 256 . 5}$ $=$ 8 minuti in circa.

IV. Un vase, essendosi mantenuto costantemente pieno, ha somministrati per un foro di 16 linee di diametro 192832 pollici cubici di acqua in 8 minuti. Si dimanda l'altezza dell'acqua nel vase sopra il foro? Egli è chiaro, che l'acqua, che somministra il dato foro sotto la ricercata altezza in un minuto, $= \frac{1}{8}\ 192832 = 24104$ pollici cubici. Perciò, essendo nella Tavola la quantità dell'acqua, che somministra in un minuto un foro di 12 linee di diametro alla profondità di 9 piedi $=$ 8135 pollici cubici, se si farà $12 . 12 . \sqrt{9} : 16 . 16 . \sqrt{x} = 8135 : 24104$,

si troverà $\sqrt{x} = \frac{24104 . 144 . 3}{8135 . 256} = 5$ piedi.

Perciò $x = 25$ piedi parigini. Ciocchè ec.

114. *Scolio*. Noi abbiamo qui tacitamente supposto, che lo scolo dell'acqua si faccia per un foro scolpito in una sottil lastra. Ma nello stesso modo si deve operare, siccome ognun vede, anche quando lo scolo si fa per un tubo addizionale, avendo però l'avvertenza di prendere la quantità attuale dell'acqua fluente nella colonna Q'' della Tavola. Aggiungo qui alcuni Problemi spettanti allo scolo dell'acqua.

PROBLEMA II.

Data la quantità dell'acqua, che sotto una data altezza esce da un dato foro F *in un dato tempo, ritrovare il diametro da darsi ad un altro foro* f, *affinchè somministri nello stesso tempo sotto una data altezza un'egual quantità d'acqua*.

115. Si chiami Q' la data quantità d'acqua, T il tempo dello scolo, D il diametro del foro F, A l'altezza del fluido contenuto sopra il foro. Egli è chiaro, che si avrà $Q' = \frac{1}{2} D^2 T \sqrt{A . 2g}$ (100.) nell'ipotesi, che lo scolo si faccia per un nudo foro. Parimente, chiamata q'

la quantità dell' acqua, che nello stesso tempo T deve somministrare il foro f, d il diametro di questo, a l' altezza data, si avrà $q' = \frac{5}{8} d^2 T \sqrt{a . 2g}$. Ma, poichè $Q' = q'$, siccome si suppone, deve anche essere $\frac{5}{8} D^2 T \sqrt{A . 2g} = \frac{5}{8} d^2 T \sqrt{a . 2g}$, ossia $D^2 \sqrt{A} = d^2 \sqrt{a}$. Perciò il diametro da darsi al foro f, ossia $d = \frac{D \sqrt[4]{A}}{\sqrt[4]{a}}$.

Ciocchè ec.

PROBLEMA III.

Ritrovare il diametro da darsi ad un foro, affinchè sotto la stessa profondità somministri nello stesso tempo la stessa quantità d' acqua, che un tubo cilindrico.

116. Si cerchi la quantità dell' acqua, che in un dato tempo somministra il tubo: sarà questa, poste le denominazioni di sopra, $Q'' = \frac{13}{16} D^2 T \sqrt{A . 2g}$. Si cerchi inoltre la quantità d' acqua, che nello stesso tempo T, e sotto la stess' altezza A deve dare il foro ricercato: si avrà $q' = \frac{5}{8} d^2 T \sqrt{A . 2g}$. Ma, poichè $Q'' = q'$, siccome si suppone, deve anche $\frac{13}{16} D^2 T \sqrt{A . 2g} = \frac{5}{8} d^2 T \sqrt{A . 2g}$, ossia $\frac{13}{16} D^2 = \frac{5}{8} d^2$, ossia finalmente $13 D^2 = 10 d^2$.

Però il diametro da darsi ad un foro, affinchè possa sotto la stessa profondità somministrare nello stesso tempo la stessa quantità d'acqua, che un tubo cilindrico di giusta lunghezza, dev'esser, ossia $d = \frac{D\sqrt{13}}{\sqrt{10}}$. Ciocchè ec.

117. *Scolio*. Se si dimandasse il diametro d da darsi ad un foro f, affinchè potesse nello stesso tempo T somministrare sotto la stessa profondità A la quantità razionale d'acqua Q, che darebbe un altro foro F, se l'acqua vi passasse secondo la direzione perpendicolare al di lui piano, si troverebbe $d = \frac{D\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$.

PROBLEMA IV.

Data la quantità dell' acqua, che sotto una data altezza esce da un dato foro F *in un dato tempo, ritrovare il diametro da darsi ad un altro foro* f, *affinchè possa somministrare nello stesso tempo sotto una data altezza una quantità d' acqua, che stia alla somministrata dal foro* F *nella data ragione di* m : n.

118. Egli è chiaro, che la quantità d'acqua Q', che somministra il foro F, dev'esser $= \frac{2}{3}$ D² T

$\sqrt{A.2g}$, l'altra q' dev'esser $= \frac{4}{5} d^2 T \sqrt{a.2g}$. Adunque, poichè deve stare $q' : Q' = m : n$, siccome si suppone, deve anch'esser $\frac{4}{5} d^2 T \sqrt{a.2g} : \frac{4}{5} D^2 T \sqrt{A.2g} = m : n$, ossia $d^2 \sqrt{a} : D^2 \sqrt{A} = m : n$; e quindi $n d^2 \sqrt{a} = m D^2 \sqrt{A}$. Però il diametro da darsi al foro f, affinchè possa somministrare nello stesso tempo sotto una data altezza una quantità d'acqua, che stia alla somministrata dal foro F nella data ragione di $m:n$, dev'essere, ossia $d = \frac{D\sqrt{(m\sqrt{A})}}{\sqrt{n\sqrt{a}}}$. Ciocchè ec.

119. *Scolio*. Quando i fori circolari si han d'aprire in uno dei lati di un vase, siccome può richiedere la natura di questi tre ultimi Problemi, bisogna prendere per altezza del fluido al di sopra del foro la sua altezza media. Cosa sia questa, si vedrà nel Capo V. di questo Libro. Nel resto se il foro dista notabilmente dalla superficie del fluido contenuto, si può prendere per altezza la distanza del suo centro dalla medesima.

PROBLEMA V.

Ritrovare, se le velocità, che ha l'acqua di un fiume in due diverse profondità, sieno fra loro in ragione subduplicata delle altezze.

120. Il Sig. Giuseppe Antonio Nadi in occasione delle visite del Pò ha proposta la macchi-

na,

na, che siegue, e che vien chiamata dal Padre Grandi *fiasca Idrometrica*. Questa si è un vaso di latta (fig. 12.) di figura parallelepipeda, chiuso dappertutto, fuorchè verso la cima di uno dei suoi lati, ove avvi un piccol foro, che si chiude, e si apre mediante una cateratta interna. Al coperchio del vase stà attaccato un tubo, che permette l'esito all'aria interna, mentre vi si fa entrare per quel foro l'acqua. Nel mezzo della cavità di questo tubo passa un fil di ferro, il quale, quando si tira all'insù, apre il foro del vase, e lo chiude, quando si rilascia, mediante una molla congegnata alla cateratta. La lunghezza del tubo tal'è, che la sua cima sporge fuori dell'acqua, mentre nel fiume s'immerge la fiasca, ed è divisa in piedi, once, affine di misurare nell'atto dell'immersione la distanza del foro della fiasca dalla superficie del fiume. Finalmente si assicura la fiasca ad un'asta di ferro, la quale si pianta nel fondo del fiume per mezzo di varj anelli in modo, che con una corda si può essa far discendere, o ascendere per l'acqua verticalmente. Col mezzo di questa macchina, e di un orologio esatto a secondi si trova in questo modo la ragione delle velocità dell'acqua corrente sotto diverse profondità.

Si scielga il luogo del fiume, dove si vuol far l'esperienza, ed ivi si pianti verticalmente l'asta. Si cali poscia dentro dell'acqua la fiasca, e quando questa ha il suo foro alla profondità

A, si fissi per mezzo della corda immobilmente all'asta. Ora, tirato all'insù il fil di ferro, si apra il foro, e s'incominci nello stesso tempo a contare i secondi, che indica l'orologio. In fine di un dato tempo, per esempio di 60 secondi, rilasciato il filo, se ne chiuda la fiasca, ed, estratta questa dal fiume, se ne cavi l'acqua rinchiusa, e si noti il suo peso, che dicasi P. Si torni poi a calare dentro il fiume la stessa fiasca ad un'altra profondità a, e vi si lasci entrar l'acqua per lo stesso foro, e, chiuso questo in fine di 60 secondi, ed estratta dal fiume la macchina, si noti il peso dell'acqua rinchiusa, il quale si dica p.

Essendosi fatto più volte l'esperimento sì nel Pò grande, come anche nella Polesella, ch'è un canale di molto minore velocità, si è sempre ritrovato $P : p = \sqrt{A} : \sqrt{a}$. Quindi, poichè le quantità Q, q delle acque fluenti sono proporzionali ai pesi respettivi P, p, deve stare $Q : q = \sqrt{A} : \sqrt{a}$, ossia, poichè le quantità d'acqua Q, q, che passano nello stesso tempo per lo stesso foro, sono proporzionali alle loro velocità V, v, deve anche stare $V : v = \sqrt{A} : \sqrt{a}$. Sono adunque le velocità dell'acqua corrente sì del Pò grande, come anche della Polesella nei luoghi degli esperimenti fatti in ragione subduplicata delle altezze, siccome appunto richiede l'applicazione, che il Sig. Domenico Guglielmini ha fatto della scoperta del Torricelli al moto delle acque correnti (8.). Ciocchè ec.

121. *Scolio*. Mi pare, che questa conseguenza, che ne tirano gl' Idraulici da quegli esperimenti, non sia esatta. Sia ED (fig. 13.) la faccia della fiasca esposta alla corrente dell' acqua direttamente. Egli è chiaro, che i fili eE, Qq, Dd, dei quali si può concepire composta l'acqua, che urta direttamente nella faccia ED, dopo il loro urto diretto in questa debbono riflettersi secondo le contrarie direzioni Ee, qQ, Dd. Ma poichè nella riflessione incontrano l'acqua, che se ne viene almeno colla stessa velocità secondo le direzioni contrarie eE, Qq, dD, debbono essi perdere il moto. Si deve adunque considerar l'acqua, che stà avanti la faccia ED della fiasca, come stagnante. Però, aperto il foro, l' acqua entra nella fiasca non già con quel grado di velocità, che ha la corrente, essendo questo estinto; ma bensì con quel grado di velocità, che le imprime la pressione delle sue parti superiori. Per questa ragione l' acqua entra sempre nella fiasca con quella velocità, che conviene all' altezza del fluido superiore, ossia la fiasca immersa nell' acqua stagnante, o corrente.

C A P O IV.

Della misura dell'aria, ch'esce dai fori dei vasi, dov'è rinchiusa, ossia la sua elasticità animata soltanto dalla compressione, ossia anche dal calore.

122. I Metodi accennati per ritrovare la quantità dell' acqua fluente per un foro di un vase mantenuto costantemente pieno han luogo soltanto, quando si tratta di fluidi incompressibili, come il vino, mercurio ec. Ma, allorchè si tratta di fluidi elastici dell' aria per esempio, bisogna fare uso di altri metodi. Ma quali sono questi? Ecco quei, che qui apporto, giacchè mi astengo, siccome mi sono espresso fin dal principio dell'Idrodinamica, del calcolo infinitesimale.

P R O B L E M A I.

Data la densità dell' aria condensata dentro di un dato vase, ritrovare la quantità dell' aria, che, durante il flusso, deve sortire nell' atmosfera.

123. EGli è chiaro, che, aperto il foro MN del vase ACDB (fig. 2.), dov'è rinchiusa l' aria condensata, deve sortire dell' aria nell' at-

mosfera, e che non può cessare il flusso della stessa, se non quando la elasticità dell'aria residua, ossia la densità di questa è uguale alla pressione, ovvero alla densità dell'aria esterna presso la Terra. Si ponga adunque la densità dell'aria condensata nel vase alla densità dell'aria esterna presso la Terra $= D : D'$, e, trovato in piedi cubici secondo le regole della Stereometrìa il volume interiore del vase ACDB, si chiami questo V. Ognun vede, che chiamato p il peso di un piede cubico di aria dell'atmosfera presso la Terra, dev'esser il peso di un piede cubico dell'aria condensata nel vase $ACDB = \frac{Dp}{D'}$.

Perciò il peso di tutta l'aria condensata $= \frac{VDp}{D'}$.

Si sottragga ora da questo il peso dell'aria, che resta dopo il flusso nel vase ACDB, ovvero il peso dell'aria dell'atmosfera presso la Terra sotto il volume dello stesso vase, ossia si faccia $\frac{VDp}{D'} - Vp$, essendo Vp il peso dell'aria atmosferica sotto il volume del vase. Il residuo darà il peso dell'aria uscita dal vase nell'atmosfera in tempo del flusso, e sarà $= \frac{VDp}{D'} - Vp = \frac{\overline{D - D'} \cdot Vp}{D'}$.

Ora $p = 1$ piede cubico di aria dell'atmosfera presso la Terra. Quindi messa una unità in questa ultima equazione al luogo di p, ossia, scancellato

p, si troverà, chiamata Q la quantità dell'aria uscita dal vase nell'atmosfera, si troverà, dico, $Q = \frac{\overline{D - D'} . V}{D'}$ piedi cubici di aria ridotta alla densità D', ch'è di 28 pollici di mercurio, dell'aria dell'atmosfera presso la Terra.

Esempio. Nel vase ACDB del volume interiore di 10 piedi cubici essendosi resa, mediante la condensazione, l'aria rinchiusa tre volte più densa dell'esteriore presso la Terra, si è poscia permesso il flusso per il foro MN nell'atmosfera. Si dimanda la quantità dell'aria uscita? Essendo $D' = 28$, sarà $D = 28 . 3 = 84$ poll. di mercurio. Onde $Q = \frac{\overline{D - D'} . V}{D'} = \frac{\overline{28 . 3 - 28} . 10}{28} = 20$ piedi cubici di aria atmosferica presso la Terra.

124. *Coroll*. Se si chiamerà A l'altezza del mercurio nel barometro, la quale conviene alla densità D dell'aria rinchiusa nel vase ACDB, A' poi l'altezza dello stesso conveniente alla densità D' dell'aria esteriore presso la Terra, si avrà $Q = \frac{\overline{A - A'} . V}{A'}$ piedi cubici di aria presso la Terra.

125. *Scolio*. Si può sciogliere il Problema anche in quest'altro modo. Chiamate A, A' le

altezze del mercurio nel barometro convenienti alle densità dell'aria rinchiusa, e dell'aria esterna presso la Terra, essendo la quantità della materia come il prodotto del volume nella densità, sarà la quantità dell'aria espulsa dal vase ACDB nell' atmosfera, ossia $Q = \overline{A - A'} . V$, dove $A - A'$ esprime la densità dell'aria espulsa. Si riduca ora quest'aria alla densità dell'aria esterna presso la Terra. Si chiami x il volume ignoto di quest'altra: sarà la quantità della sua materia $= x A'$. Onde, facendo $x A' = \overline{A - A'} . V$, si troverà il volume x in piedi cubici, che racchiuderebbe l'aria espulsa, se questa venisse ridotta alla densità dell'aria presso la Terra $= \frac{\overline{A - A'} . V}{A'}$. Onde anche $Q = \frac{\overline{A - A'} . V}{A'}$ piedi cubici di aria della densità dell'atmosfera presso la Terra.

PROBLEMA II.

Ritrovare la quantità dell'aria, che, durante il flusso, passa da un dato vase pieno di aria condensata in un altro dato vase pieno soltanto di aria rarefatta, data essendo la densità dell'aria in ciascun vase avanti il flusso.

126. Si pongan le denominazioni di sopra rispetto al vase ACDB, dove si racchiude l'aria

condensata, e sia la densità dell'aria rarefatta nell'altro vase alla densità dell'atmosferica presso la Terra $= d : D'$. Egli è chiaro, che, chiamato p il peso di un piede cubico di aria atmosferica presso la Terra, dev'esser il peso di un piede cubico di quell'aria rarefatta $= \frac{dp}{D'}$. Però, chiamato v il volume interiore del secondo vase ritrovato in piedi cubici, dev'esser il peso di tutta l'aria rarefatta in quel vase $= \frac{vdp}{D'}$. Si apra ora la comunicazione tra l'uno, e l'altro vase: cessato il flusso dovrà l'aria esser della stessa densità in ciascun vase. Quanta dunque sarà la comune densità dell'aria dopo il flusso? Poichè la massa, ossia il peso dell'aria è lo stesso di prima anche dopo il flusso, e poichè la densità è come il quoto della massa, ossia del peso diviso per il volume, dev'esser la comune densità dell'aria dopo il flusso $= \frac{VDp + vdp}{D' . \overline{V + v}}$, dove $\frac{VDp}{D'}$ è il peso dell'aria condensata, e V il volume del vase ACDB, dove questa è rinchiusa. Quindi, se si moltiplicherà questa comune densità per V, si avrà il peso dell'aria rimasta dentro il vase ACDB dopo il flusso $= \frac{V^2Dp + Vvdp}{D' . \overline{V + v}}$. Se poi questo peso si leverà dal peso dell'aria con-

denſata nello ſteſſo vaſe avanti il fluſſo, ſi avrà finalmente il peſo dell'aria uſcita dal vaſe ACDB in tempo del fluſſo $= \frac{VDp}{D'} - \frac{\overline{V^2Dp - Vvdp}}{D'.\overline{V+v}}$ $= \frac{\overline{D-d}.Vvp}{D'.\overline{V+v}}$. Quindi, poichè $p = 1$ piede cubico di aria dell'atmosfera preſſo la Terra, sarà, chiamato Q la quantità dell'aria uſcita, sarà, dico $Q = \frac{\overline{D-d}.Vv}{D'.\overline{V+v}}$ piedi cubici di aria ridotta alla denſità dell'aria dell'atmosfera preſſo la Terra. Ciocchè ec.

127. *Coroll.* I. Si ponga l'aria, che ſi racchiude nel secondo vaſe, sì rarefatta, che la sua denſità riſpetto a quella dell'aria atmosferica preſſo la Terra ſia nulla, coſicchè $d = 0$, oſſia ſi ponga queſto secondo vaſe voto di aria: sarà in queſto caſo $Q = \frac{D.Vv}{D'.\overline{V+v}}$, eſſendo $d = 0$. Se di più $V = v$, ſi avrà in queſt'altro caſo $Q = \frac{D.V^2}{D'.2V}$ $= \frac{DV}{2D'}$: se finalmente anche $D = D'$, oſſia se il vaſe ſi supporrà pieno dell'aria atmosferica preſſo la Terra, ſi avrà in queſt'ultimo caſo $Q = \frac{1}{2}V$ piedi cubici di aria ridotta alla denſità dell'aria preſſo la Terra.

128. *Coroll.* II. Poichè $D = A$, $D' = A'$, e $d = a$, fatta la sostituzione, si avrà $Q = \frac{\overline{A - a} \cdot Vv}{A' \cdot \overline{V + v}}$ piedi cubici di aria ridotta alla densità dell'aria presso la Terra.

129. *Coroll.* III. Poichè il flusso dell'aria non cessa, se non quando la densità dell'aria rinchiusa nel vase ACDB diventa eguale alla pressione dell'aria nell'altro vase, ben si vede, che, ancorchè quest'ultimo sia voto, e comunque grande, non può l'aria contenuta nel vase ACDB sortire intieramente, cosicchè questo resti perfettamente voto; ma vi deve sempre rimanere un poco di aria della densità corrispondente alla pressione dell'aria nell'altro vase; il che è conforme anche all'idea della elasticità della stess'aria.

PROBLEMA III.

Data la densità dell'aria rinchiusa in un dato vase, e dato l'aumento, che produce nella di lei elasticità il grado di calore applicato, ritrovare la quantità dell'aria, che deve da quel vase sortire nell'atmosfera, tostochè si apre il foro, durante lo stesso grado di calore.

130. UN vase pieno di aria, allorchè si scalda, si vota in parte, venendo, siccome abbiam già

detto, dal calore accresciuta la elaſticità. Quindi è, che da quel vase deve sortire nell'atmosfera l'aria, finchè l'elaſticità della reſidua nel vase ſia eguale alla preſſione dell'eſterna preſſo la Terra, oſſia al peso di 28 pollici di mercurio. Adunque ſi cerchi l'altezza A del mercurio nel barometro, che conviene all'elaſticità dell'aria rinchiusa, eſſendo dati e la denſità di queſta, e l'aumento prodotto nell'elaſticità dal calore applicato. Sarà la quantità dell'aria uscita da quel vase nell'atmosfera sotto quel grado di calore, oſſia $Q = \frac{\overline{A - A'} . V}{A'}$ piedi cubici di aria ridotta alla denſità dell'aria preſſo la Terra (124.), purchè V, ch'esprime il volume interiore del vase, ſia espreſſo in piedi cubici. Ciocchè ec.

131. *Coroll.* I. Poichè l'aria dell'atmosfera paſſando dal principio del gelo ſino al maſſimo noſtro caldo di Eſtate, il qual è di 25 gradi del termometro di Reaumur in circa, acquiſta nella sua elaſticità un aumento di un settimo appress'a poco, dev'eſſer la quantità dell'aria, che sortirebbe nell'atmosfera, se il vase chiuso al principio del gelo s'apriſſe nel tempo del noſtro maſſimo caldo, oſſia $Q = \frac{\overline{28 + 4 - 28} . V}{28} = \frac{1}{7} V$.

Parimente poichè l'aria compreſſa dal peso dell'atmosfera, e condensata dal freddo del ghiaccio acquiſta nella sua elaſticità un aumento di un

terzo sotto il calore dell' acqua bollente, e di due terzi sotto un doppio grado di quel calore, dev' esser la quantità dell' aria, che sortirebbe nell' atmosfera, se il vase dopo di esser stato esposto al freddo del ghiaccio si chiudesse, e non s' aprisse, se non esposto o al semplice, o al doppio calore dell' acqua bollente, deve, dico, nel 1.° caso esser $Q = \frac{1}{3} V$, e nell'altro $Q = \frac{2}{3} V$ piedi cubici di aria ridotta alla densità dell' aria presso la Terra.

132. *Scolio*. La ragione del volume dell' aria compressa dal peso dell' atmosfera, e condensata dal freddo del ghiaccio al volume della stess' aria rarefatta dal dato grado di calore si ritrova in pratica in questo modo. Si prenda un tubo di vetro lungo 15 pollici, chiuso ermeticamente da un capo, e dappertutto dello stesso diametro preso interiormente, e s' immerga interamente, tenendo la di lui estremità aperta in alto, in un bagno di mercurio riscaldato fino a quel dato grado di calore; il che si conoscerà col mezzo del termometro. Indi dopo qualche momento si ritiri il tubo, e s' immerga subito la di lui parte aperta in un altro mercurio, che dev' esser un po' caldo, perchè non rompa il tubo, e si lasci poi il tutto raffreddare. Si vedrà, che a misura, che il tubo si raffredderà, passerà in questo il mercurio. Per dare un certo, e noto grado di raffreddamento bisogna di poi attorniare di ghiaccio pestato la porzione del tubo, che

contien l' aria, avendo nello stesso tempo l'avvertenza, che il tubo stia in una situazione quasi orizzontale, affinchè l' aria residua non sia quasi niente compressa dal peso del mercurio contenuto. Finalmente paragonando il volume, che occupa l'aria dentro il tubo, tostochè essa è raffreddata al termine del ghiaccio, col volume del tubo, si avrà la ragione del volume dell'aria compressa dal peso dell' atmosfera, e condensata dal freddo del ghiaccio al volume della stess' aria rarefatta dal dato grado di calore. Non si deve però qui ommettere, che, quando si tratta di un grado di calore non superiore a quello dell'acqua bollente, si può allora far uso di un bagno di acqua calda. Perchè l' esperienza riesca con esattezza, bisogna sfuggire, piucchè si può, l'aria umida, e osservare con attenzione, se il tubo, che si adopera, abbia dappertutto un egual diametro. Per accertarsi di ciò è d'uopo far passare dall' una all' altra estremità una piccola colonna di mercurio, e osservare, se questa ha in tutte le parti del tubo la stessa lunghezza.

133. *Coroll.* II. Quindi s'intende il mezzo, che si adopera, allorchè si vuole far passare un liquore in un vase di sì stretta apertura, che non ammette l' imbuto. Affine di diminuire la densità dell'aria rinchiusa si fa scaldare il vase, e poi subito s' immerge la di lui boccuccia nel liquore. A misura che l' aria interna, raffreddandosi, si condensa, il liquore viene dalla mag-

gior pressione dell'aria esteriore obbligato ad entrare nel vase. Quindi anche s'intende l'uso della *ventosa*. Questa non è altro, che un vase di vetro, dentro il quale si accende della stoppa, affine di rarefare l'aria rinchiusa, e che, quando stà per estinguersi la stoppa, si applica subitamente su la pelle di una determinata parte del corpo umano. L'aria esteriore premendo le altre parti con maggior forza, che l'aria dilatata dentro la ventosa, obbliga gli umori del corpo umano a portarsi verso quella parte, cui è applicata la ventosa, e la fanno gonfiare. Se si leva la ventosa, se con una lancetta si taglia in più luoghi quivi la pelle, se in fine si torna ad applicarle collo stesso metodo la ventosa, per la stessa ragione esce il sangue dalle ferite.

PROBLEMA IV.

Estrarre da un vase l'aria contenuta mediante la Macchina pneumatica.

134. Le parti principali, dalle quali è composta questa (fig. 14.) Macchina sì nota appresso i Fisici, sono il *corpo della tromba* AB di metallo, e dappertutto della stessa capacità: lo *stantuffo* B, che si alza, e s'abbassa lungo il corpo della tromba mediante il suo manico BV terminato in forma di staffa per essere abbassato col

piede: il *piatto* GH di metallo forato nel suo centro insieme alla pelle, che lo cuopre: il *recipiente*, ossia la *campana* ZZ di un cristallo grosso, la quale si posa sul piatto dopo di averne ammollata la pelle: il *canaletto* finalmente *di comunicazione* NE tra il recipiente, e il corpo della tromba fornito della chiave NM. Questa, la di cui forma è o di un cilindro, o di un cono troncato, ha un foro scolpito nel suo diametro, ed un solcó scavato nella lunghezza della sua superficie. Quindi s'intende tutto l'artifizio della chiave, che, secondochè si volta, dà comunicazione all'aria della tromba o soltanto coll'aria interiore del recipiente, o soltanto coll'aria esterna. Per movere lo stantuffo dall'insù all'ingiù, e dall'ingiù all'insù si può far uso anche di una ruota dentata. Parimente si possono applicare alla Macchina due corpi di tromba, e due stantuffi, uno de'quali sale, mentre l'altro discende. Ecco in qual modo si estrae dal recipiente ZZ l'aria rinchiusa.

Si volti la chiave in modo, che il foro di questa corrisponda alla cavità del canaletto: sarà in questo caso aperta soltanto la comunicazione del corpo della tromba col recipiente, restando il solco in un lato, dove non comunica nè col canaletto, nè col corpo della tromba. S'abbassi poscia lo stantuffo da A fino in B: questo spingerà avanti di se tutta l'aria della tromba fuori nell'atmosfera. Onde, poichè dentro della tromba

fassi un voto, l'aria del recipiente, spandendosi dentro di quello in virtù della sua elasticità, diventa necessariamente più rara. Ora si rivolti la chiave in maniera, che il foro, che prima era verticale, divenga orizzontale. In quest'altro caso il solco corrisponde soltanto alla cavità della tromba, e apre la comunicazione di questa coll'aria esterna. Si alzi dipoi lo stantuffo da B fino in A: l'aria sarà per il solco espulsa fuori della tromba nella atmosfera. Quindi se si tornerà a voltare la chiave, e ad abbassare lo stantuffo da A in B, tornerà a spandersi nella tromba in virtù della sua elasticità l'aria del recipiente, e perciò a farsi più rara; e se si tornerà a rimettere la chiave nella situazione di prima, e ad innalzare lo stantuffo da B in A, tornerà l'aria ad essere espulsa per il solco fuori della tromba nell'atmosfera. Egli è chiaro, che, continuando più volte la stessa operazione, si renderà l'aria del recipiente sì rara, che si potrà considerare il recipiente come sensibilmente voto. Ciocchè ec.

135. *Scolio*. Dissi *sì rara* ec. Imperocchè, siccome abbiam già detto (129.), l'aria del recipiente non può mai passar tutta nel corpo della tromba, qualunque sia il numero delle spinte dello stantuffo. Quindi è, che, se si applica il barometro alla Macchina pneumatica, non discende mai il mercurio perfettamente al suo livello, restando sempre un poco più alto. Quest'è un piccol difetto, cui sono sottoposte necessariamente le

Macchi-

Macchine pneumatiche; ma che non porta veruna conseguenza di rimarco. Si può però sempre col loro mezzo ridurre la densità dell'aria rinchiusa 300, e più volte minore di quella dell'esteriore appresso la Terra, abbassando una buona Macchina il mercurio nel barometro ad una linea al di su del di lui livello. L'inventore di questa sì celebre Macchina è stato Otto de Guerike Console di Magdeburgo, che la fece conoscere in Ratisbona l'anno 1654. Alcuni anni dopo Boyle ne ordinò la costruzione di una, che in appresso molto perfezionò. Il grand'uso, che di questa Macchina ha fatto il Fisico Inglese, e il felice esito delle di lui esperienze han messo in dimenticanza l'Inventore Tedesco, cosicchè essa si chiama al presente anche *Boyelana*, e il voto, che colla stessa si forma, *Boyelano*.

PROBLEMA V.

Date le capacità della tromba, del canaletto di comunicazione, e del recipiente di una Macchina pneumatica, e dato il numero delle spinte dello stantuffo, ritrovare la ragione della densità dell'aria esteriore appresso la Terra alla densità dell'interiore.

136. Si ponga *a* la somma delle capacità del recipiente, e del canaletto, *b* la somma delle

capacità del recipiente, del canaletto, e della parte del corpo della tromba, che percorre lo stantuffo nella sua elevazione, e depressione, n il numero delle spinte dello stantuffo, $m:1$ finalmente la ragione della densità dell'aria esterna appresso la Terra alla densità dell'interiore dopo il numero n delle spinte dello stantuffo. Sulla pelle ammollata, che cuopre il piatto della Macchina vi si posi il recipiente. In questo momento la densità dell'aria nello spazio a non è diversa da quella della stessa appresso la Terra. Si chiami d la densità di quest'aria, e si apra la comunicazione tra il corpo della tromba, e il recipiente. Egli è chiaro, che, abbassando lo stantuffo da A in B, l'aria rinchiusa nello spazio a deve in vigore della sua elasticità spandersi uniformemente in tutto lo spazio b.

Si cerchi adunque la densità dell'aria in questo spazio. Poichè la quantità dell'aria rinchiusa nello spazio b è la stessa, che quella dell'aria contenuta nello spazio a, la di lei densità dev'esser in ragione inversa dallo spazio, ch'essa occupa, ossia deve stare alla densità, che l'aria avea nello spazio a, alla densità, che la stessa ha nello spazio $b = b:a$. Quindi, poichè la densità, che l'aria avea nello spazio a, è, siccome abbiam detto di sopra, $= d$, se si farà $b:a = d:x$, si troverà la densità x dell'aria interiore dopo la prima spinta dello stantuffo $=$ $d. \frac{a}{b}$.

Si rivolti la chiave, cosicchè si apra la comunicazione tra la tromba, e l'aria dell'atmosfera, e si espella dalla tromba l'aria per il solco della chiave nell'atmosfera. Poscia, rimessa la chiave, e ribassato come prima lo stantuffo, l'aria dello spazio a tornerà in virtù della sua elasticità a spargersi uniformemente nello spazio b. Facilmente s'intende, che in questo secondo caso deve stare la densità, che l'aria avea nello spazio a, alla densità, che la stessa ha nello spazio b, $= b : a$. Ond'è, che, poichè la densità, che l'aria avea nello spazio a dopo la prima spinta dello stantuffo, è $= d. \frac{a}{b}$, se si farà $b : a = d. \frac{a}{b} : x$, si avrà la densità x, che l'aria ha dopo la seconda spinta dello stantuffo, $= d. \frac{a^2}{b^2}$. Nello stesso modo si dimostra, che la densità dell'aria interiore dopo la terza spinta $= d. \frac{a^3}{b^3}$, dopo la quarta $= d. \frac{a^4}{b^4}$, e dopo finalmente il numero n delle spinte, $= d. \frac{a^n}{b^n}$.

Adunque, poichè la ragione della densità dell'aria esterna alla densità dell'interiore dopo il numero n di spinte è di $m : 1$, siccome abbiam supposto, si avrà $d : d. \frac{a^n}{b^n} = m : 1$; e perciò

$m = \frac{b^n}{a^n}$. Quindi, se si prenderanno i logaritmi di ciascuna quantità, si scioglierà il Problema col mezzo di questa equazione log. $m = n$. log. $b - n$. log. $a = n$. (log. b — log. a), essendo il logaritmo di un numero elevato ad una potenza, qualunque questa sia, eguale al logaritmo di quel numero moltiplicato nell'esponente della potenza, ed essendo il logaritmo di una frazione eguale al logaritmo del numeratore meno quello del denominatore, siccome si dimostra in Aritmetica. Ciocchè ec.

Esempio. In una Macchina pneumatica la capacità del corpo della tromba, che percorre lo stantuffo nella sua ascesa, e discesa, è di 28, quella del canaletto di 6, quella finalmente del recipiente di 66 pollici cubici. Si dimanda quante volte l'aria esteriore dev'esser più densa dell'interiore dopo 10 spinte di stantuffo? Ognun vede, che $a = 72$, $b = 100$, $n = 10$. Adunque si cerchi nella Tavola dei logaritmi il logaritmo di 72, e si troverà 1,8573325: poscia il logaritmo di 100, e sarà 2,0000000. Messi questi valori nell'equazione di sopra, si avrà log. $m = 10$. (2,0000000 — 1,8573325) $= 10$. $1426675 = 1,4266750$. Finalmente si cerchi nella stessa Tavola il numero, che corrisponde a questo logaritmo, e sarà 26 in circa. Si trova dunque, che dopo 10 spinte di stantuffo nella Macchina suddetta l'aria si rarefà in modo, che

diventa 26 volte in circa più rara dell' esteriore presso la Terra.

137. *Scolio*. Se si volesse trovare un numero, che più esattamente corrispondesse al logaritmo 1,4266750, bisognerebbe procedere in questo modo, si sottragga da questo il logaritmo prossimamente minore, che si trova nella Tavola, vale a dire il logaritmo 1,4149733, e si noti il residuo 117017. Questo stesso logaritmo si sottragga dal prossimamente maggiore della stessa Tavola, ossia dal logaritmo 1,4313638, e si noti il residuo 163905. Quindi, poichè la differenza dei numeri corrispondenti nella Tavola ai due ultimi logaritmi contigui si è 1, si faccia 163905: 1 = 117017: x, e si avrà $x = \frac{713}{1000}$ in circa. Però il numero, che corrisponde al logaritmo 1,4266750, si è $26 + \frac{713}{1000}$ in circa.

138. *Coroll.* I. Se si chiamerà A' l'altezza del mercurio nel barometro, che conviene alla densità dell'aria dell'atmosfera presso la Terra, A poi l'altezza dello stesso conveniente alla densità dell'aria residua nel recipiente, e canaletto dopo il dato numero delle spinte di stantuffo, si troverà la quantità dell'aria uscita dal recipiente, e canaletto nell' atmosfera dopo quel numero di spinte, ossia $Q = \frac{\overline{A' - A} \cdot V}{A'}$ piedi cubici di

aria ridotta alla densità dell'aria presso la Terra, purchè V, ch'esprime la somma delle capacità del recipiente, e del canaletto, sia espresso in piedi cubici.

139. *Coroll.* II. Se sarà data in una Macchina pneumatica la ragione della densità dell'aria esterna presso la Terra alla densità dell'interna, la somma delle capacità del recipiente, del canaletto, e della tromba, che percorre lo stantuffo, si troverà facilmente il numero delle spinte dello stesso. Imperocchè, essendo log. $m = n$. (log. b — log. a), dev' esser anche $n = \frac{\log.\ m}{\log.\ b - \log.\ a}$. Così se nella Macchina di sopra si volesse l'aria rinchiusa 100 volte più rara dell' esteriore presso la Terra, poichè log. $m = 2,0000000$, log. $b = 2,0000000$, log. $a = 1,8573325$, si avrebbe, fatta la sostituzione, $n = \frac{2,0000000}{2,0000000 - 1,8573325} = 14$ spinte in circa di stantuffo.

140. *Scolio*. La dottrina di questo Capo c' insegna tre mezzi per estrar l' aria dai pori di un corpo, dove questa è rinchiusa. Il primo si è di farlo raffreddare notabilmente. Per il freddo le parti del corpo si avvicinano le une alle altre, si ristringono i di lui pori, l'aria, ch'è in questi, si condensa, e per la sua accresciuta elasticità se ne esce dagli stessi in parte. L'aria, ch'è rin-

chiusa nei pori dei corpi, poichè sostiene la pressione dell'atmosfera, ha la stessa densità. L'altro si è di fare scaldare il corpo fortemente. In questo caso il volume dell'aria viene dal calore aumentato in modo, che non può più essere intieramente contenuto nei pori, non dilatandosi mai la capacità di questi tanto, quanto l'aria. Per questa ragione l'aria rinchiusa esce in gran parte dalle carni, e dai frutti, che si cuocono, dai legni, che si abbruciano, dai liquori, che bollono, siccome c'insegna l'esperienza. Il terzo in fine si è di tenere il corpo per qualche tempo nel voto. In quest'altro caso si sopprime la pressione dell'aria esteriore, e si lascia il luogo all' interiore di spiegare tutta la sua elasticità. Quindi è, che se si mettono in un vase di vetro pieno di acqua chiara diversi corpi, come un pezzo di legno, una pietra tenera ec., in modo che restino intieramente immersi, e se si posa questo vase sotto il recipiente di una macchina pneumatica, si osserva, che a misura, che si cava fuori dal recipiente l'aria, esce dai corpi immersi una gran copia di bolle d'aria, le quali, movendosi a traverso dell'acqua, si portano alla superficie, ove scoppiano, e si confondono coll'aria residua del recipiente. Quindi è anche, che i liquori nel voto sembrano bollire, come se fossero esposti al fuoco. A questi tre mezzi la Chimica ne aggiunge un altro, ch'è la dissoluzione del corpo. Le molecole, allorchè vengono dal dis-

solvente disunite, e suddivise, lasciano libere, ed isolate le particelle dell'aria, che fra di loro tenevano rinchiuse, ſiccome ſi oſſerva, allorchè in un vase pieno di acqua ſi fa disciogliere una quantità di sale, o di zucchero. Ma qui bisogna guardare dal non confondere l'aria, ch'è nei pori del corpo, che ſi discioglie, coi fluidi aeriformi, che ſi formano molte volte nel tempo della dissoluzione, ſiccome han fatto per lo paſſato i Fiſici, non avendo queſti fluidi nel corpo, se non le proprie baſi, che, combinandoſi colla materia del calore, acquiſtan la forma aerea.

CAPO V.

Della misura dei vapori, che manda un vase pieno di acqua espoſto al fuoco.

141. Quando ſi espone al fuoco un vase pieno di aqua, la materia del calore libero, che tende sempre a spanderſi uniformemente in vigore della sua elaſticità, sortendo dall'acqua, seco trasporta le parti più sottili di queſta, e le meno aderenti alla maſſa, e combinandoſi colle ſteſſe riduce queſta parte dell'acqua allo ſtato di un fluido eſtremamente leggiero, sottile, ed elaſtico. Ma quanta ſi è la copia di queſto fluido, che ſi chiama *vapore*, allorchè il vase, che contien l'acqua, viene espoſto all'azione del fuoco?

PROBLEMA I.

Data la quantità dell' acqua, che contiene un vase avanti l'ebollizione, e data la quantità di quella, che resta nello stesso vase dopo, ritrovare la quantità dei vapori espulsi in tempo della ebollizione.

142. Il peso dell'acqua, che contiene il vase avanti l'ebollizione, si esprima in once parig., e si dica P; quello, che resta nel vase dopo, si esprima parimente in once parig., e si chiami p. Egli è chiaro, che sarà il peso, che l'acqua rinchiusa ha perduto nel tempo della sua ebollizione, $= P - p$ once parig. Si cerchi ora il volume, che occupa questo peso di acqua in pollici cubici. Poichè il peso di un piede cubico, ossia di 1728 pollici cubici di acqua, è di 70 libbre, ossia di $70 . 16 = 1120$ once parigine, essendo una libbra di Parigi di 16 once, se si farà $1120 : 1728 = P - p : x$, si troverà il volume x ricercato $= \frac{\overline{P - p} . 1728}{1120}$ pollici cubici. L'esperienza c'insegna, che, allorchè si converte l'acqua in vapori mediante l'azion del fuoco, essa si dilata sotto la pressione dell' aria dell'atmosfera in uno spazio 14000 volte in circa maggiore. Però il volume, che occupa

l'acqua ridotta in vapori, ossia la quantità di vapori espulsi in tempo della ebollizione dev'esser $= \frac{\overline{P - p} \cdot 1728 \cdot 14000}{1120}$ pollici cubici di vapore. Se in vece del peso fosse dato il volume avanti, e dopo l'ebollizione, la suddetta quantità si troverebbe $= \overline{V - v} \cdot 14000$ pollici cubici di vapori, purchè il volume V dell'acqua avanti, e v della stessa dopo l'ebollizione sia espresso in pollici cubici. Ciocchè ec.

Esempio. Notissima si è appresso i Fisici la Macchina, che si chiama *Eolipila*. Questa, che non è, se non un piccol vase di rame in forma di una pera fornito di un collo ricurvo, che termina in uno assai stretto orifizio, siccome si vede nella fig. 15., si riempie di acqua giusta il metodo già esposto (134.). Si prenda dunque una eolipila, e pesata con esattezza si noti il di lei peso. Poscia si riempie di acqua per metà in circa, e di nuovo pesata si noti il di lei peso. Sottratto dal secondo il primo peso, si avrà il peso P dell'acqua rinchiusa. Si metta di seguito l'eolipila a guisa di una caffettiera su dei carboni accesi. Si osserverà dopo qualche tempo sortire il vapore, in cui si converte dall'azione del fuoco l'acqua rinchiusa, dal di lei orifizio, come un vento burrascoso, quantunque esso sostenga nella sua uscita la pressione dell'aria dell'atmosfera. Se si vuol sapere la copia dei vapori, che manda

il vase in un dato tempo, si prenda in fine di questo con una tenaglia per non essere scottato il di lui collo, e s'immerga nell'acqua fredda, guardando ben bene, che il suo orifizio non sia sott'acqua. Indi, asciugata esteriormente la eolipila, e pesata di nuovo, si noti il peso p dell' acqua residua. Si ponga $P = 10$, e $p = 7$ once parig.: si troverà la quantità dei vapori, che ha mandati l'eolipila nel dato tempo di ebollizione $= \frac{\overline{10 - 7} \,.\, 1728 \,.\, 14000}{1120} = 64800$ pollici cubici di vapore.

143. *Scolio*. Per accertarsi, che l'acqua, convertendosi in vapore mediante l'azione del fuoco, si dilata sotto la pressione dell'aria in uno spazio 14000 volte maggiore in circa, si prenda un sottil tubo di vetro, in fondo del quale sia stata soffiata una palla di due pollici di diametro, ossia di 24 linee di diametro, e vi si metta dentro una goccia di acqua di una linea di diametro. Egli è chiaro, che la solidità della palla del tubo starà alla solidità della goccia di acqua $= 13824 : 1$, essendo le solidità delle sfere come i tubi dei diametri. Se si esporrà la palla al fuoco, ravvolgendola lentamente intorno di se stessa, finchè tutta la goccia d'acqua sia convertita in vapore, si osserverà, immersa allora la cima del tubo nell'acqua, che per non far crepare la palla, dev'essere un po'

calda, si osserverà, dico, che a misura, che il vapore si condenserà, raffreddandosi, vi entrerà tant'acqua, quanta ne abbisogna per riempiere la palla; il che è segno, che la goccia d'acqua rinchiusa nella palla, riducendosi in vapore mediante l'azione del fuoco, ha preso un volume 14000 volte in circa maggiore. Imperocchè in tanto succede un sì fatto fenomeno, in quanto che la goccia d'acqua, mentre si riduce in vapori, scaccia dalla palla tutta l'aria, riempiendola dei suoi vapori. Ond'è, che condensandosi per il freddo il vapore nella palla vi lascia dentro un voto, che viene occupato dall'acqua ivi spinta dalla pressione dell'aria esteriore. Si può anche ritrovare il volume della goccia da mettersi nel tubo, prendendo un peso d'acqua 14000 volte minore di quello, che ha l'acqua contenuta nella stessa, essendo nei corpi omogenei i volumi proporzionali ai pesi.

144. *Coroll.* I. Quindi s'intende la forza smisurata, che può esercitar l'acqua, allorchè dall'azione del fuoco viene ridotta in vapori. La polvere d'archibugio, quand'è perfetta, si spande sotto la pressione dell'aria dell'atmosfera in uno spazio 4000 volte maggiore di quello, che occupa, siccome consta dalle osservazioni del Sig. Amontons nelle Memorie dell'Accademia Reale di Parigi del 1707, e del Sig. Belidor nel Tomo 4 delle Miscellanee di Berlino. Perciò la dilatabilità dell'acqua, quando questa, me-

diante l'azione del fuoco si riduce in vapori, è tre volte, e mezza maggiore di quella della polvere d'archibugio. Onde, se mai si potesse ritrovare un mezzo di ridur l'acqua in vapore con quella facilità, e prontezza, con cui s'accende la polvere d'archibugio, ben si vede, che i cannoni, e gli schioppi a vapore produrrebbero effetti ben più notabili di quei, che gli stessi producono colla polvere. Ma se il vapore è ritenuto da qualche ostacolo, che ne impedisca la sua espansione, allora il calore aumenta la di lui elasticità di tanto, di quanto aumenterebbe il di lui volume, se avesse la libertà di distendersi. In virtù di quest'aumento di elasticità esercita allora il vapore forze prodigiose, e capaci di superare giusta le osservazioni del Sig. Musschenbroek tredici, e più volte quelle della polvere d'archibugio.

145. *Coroll.* II. Essendo adunque la forza del vapore dell'acqua bollente sì grande, principalmente quando da qualche ostacolo viene impedita la sua espansione, non ci deve far maraviglia

I. Se, quando l'orifizio della eolipila si chiude per caso, o ad arte in modo, che il vapore, nel quale si converte l'acqua rinchiusa, non possa più sortire, se, dico, allora il vapore, accumulandosi sempre più dentro il vase esercita tante volte contro l'interna superficie tanta forza, che lo manda in pezzi con un orribile scoppio, siccom'è successo talvolta, quan-

tunque l'eolipila fosse di rame, e le sue pareti avessero una grossezza notabile.

II. Se un grosso cannone riempito d'acqua per tre quarti della sua capacità, e chiuso fortemente a vite nella bocca, e al focone scoppiò con gran fracasso, essendo stato per un giorno intiero esposto ad un fuoco vivissimo, siccome sperimentò il Marchese di Worcester.

III. Se, alloraquando lo stopaccio bagnato, che serve a rinfrescare i cannoni dopo un certo numero di spari, e che stà attaccato alla cima di un bastone, chiude con esattezza il calibro, il vapore, che si forma nel fondo del cannone, non potendosi liberamente distendere, lo spinge con violenza, e porta seco qualche volta il braccio del cannoniere. Si previene quest'accidente adoperando in vece del bastone un tubo voto per dare il passaggio al vapore.

IV. Se finalmente col mezzo del vapore dell'acqua bollente si sollevano a smisurate altezze corpi enormi di acqua, siccome a suo luogo vedrassi nella macchina a fuoco.

PROBLEMA II.

Ritrovare la quantità dei vapori, che di giorno si sollevano nell'Estate dalla superficie del mare Mediterraneo per via del solo caldo.

146. Il Sig. Halley avendo ridotta l'acqua di un vase a quel grado di salsedine, che ha l'ac-

qua del mare, e datole poscia mediante il fuoco quello stesso calore, che produce in Londra il Sole in tempo di Estate, trovò, che l'altezza dell'acqua svaporata in due ore era $= \frac{1}{35}$ di un pollice di Londra. Stando il piede di Parigi a quello di Londra $= 1440 : 1351$, deve anche il pollice di Parigi stare a quello di Londra $= \frac{1440}{12} : \frac{1351}{12} = 1440 : 1351$. Adunque se si farà $1440 : 1351 = \frac{1}{35}$ di un pollice di Londra : x, si avrà x, ossia la parte, che gli corrisponde, del pollice di Parigi $= \frac{1351}{35 \cdot 1440}$.

Però, poichè l'acqua svaporata in due ore ha l'altezza di $\frac{1351}{35 \cdot 1440}$ di un pollice di Parigi, la stess'acqua svaporata collo stesso grado di calore in 12 ore di seguito deve avere l'altezza di $\frac{1351 \cdot 6}{35 \cdot 1440}$ di un pollice di Parigi. Egli è chiaro, che, essendosi preso nella sperienza per norma quel grado di calore, che conviene alla Città di Londra, non si può errare di molto, considerando la misura ritrovata della evaporazione come universale per tutto il Mediterraneo in tempo di Estate.

Ora il Mediterraneo si stende in lunghezza d'occidente in oriente 2580 miglia, e tra le varie sue larghezze gli si possono assegnare per

media 240 miglia in circa. Quindi senza pericolo di errore di grande considerazione si può stabilire tutta la superficie del Mediterraneo = 619200 miglia quadrate, ossia poichè un miglio quadrato contiene 3600000000 pollici quadrati, di 619200 . 3600000000 pollici quadrati. Quindi anche l'evaporazione, che patisce il Mediterraneo in tempo di Estate in 12 ore, dev'esser $= \frac{1351 \cdot 6 \cdot 619200 \cdot 3600000000}{35 \cdot 1440}$ pollici cubici di acqua, ossia poichè un piede cubico contiene 1728 pollici cubici, $= \frac{1351 \cdot 6 \cdot 619200 \cdot 3600000000}{35 \cdot 1440 \cdot 1728}$ piedi cubici di acqua, ossia finalmente, poichè un miglio cubico contiene 125000000000 piedi cubici $= \frac{1351 \cdot 6 \cdot 619200 \cdot 3600000000}{35 \cdot 1440 \cdot 1728 \cdot 125000000000}$ miglia cubiche di acqua.

Si ponga, che il giorno in tutto il Mediterraneo sia nell' Estate di Sole 12 ore, quantunque sia assai più lungo: sarà, considerata la sola evaporazione del Mediterraneo, la quale si fa in tempo di giorno per via del solo caldo, sarà, dico, la quantità dei vapori sollevati nell' aria in tempo di Estate, ossia nei tre mesi di Giugno, Luglio, ed Agosto, ossia in 92 giorni dalla superficie di quel mare =

1351.

$$\frac{1351 . 6 . 619200 . 3600000000 . 92}{35 . 1440 . 1728 . 125000000000} = 152 \tfrac{1}{3}$$

miglia cubiche in circa di acqua. Ciocchè ec.

147. *Scolio*. L'acqua ſi ritrova non solamente nello ſtato di vapore, ma eziandio di diſſoluzione nell'aria, eſſendo queſta un diſſolvente dell'acqua, ſiccome l'acqua è un diſſolvente dei sali. Ond'è, che, quando all'aria libera per qualche tempo ſi lascia un vase ben asciutto, e pulito, che contenga una libbra di ghiaccio peſto mescolato con sei once di sal marino, ſi oſſerva, che le di lui pareti eſterne ſi vanno a poco a poco coprendo di uno ſtrato di brina, la qual non è altro che l'acqua, che tiene in diſſoluzione, e che abbandona l'aria ambiente, mentre queſta ſi condensa per il freddo prodotto da quella miſtura, agghiacciata, ſiccome fa l'acqua calda, che depone, allorchè ſi raffredda, una parte del sale, che tiene in diſſoluzione. La quantità dell'acqua, che ſi sublima nell'atmosfera per queſta via, quantunque non ſi poſſa determinare con esattezza, è però grandiſſima, e di gran lunga maggiore della evaporazione prodotta dal caldo, se ſi riflette, che la forza diſſolutiva dell'aria ha luogo in ogni tempo, ed in ogni ſtagione, e che nel portar via l'acqua ha eſſa maggior efficacia, che il caldo, allorchè ad un corpo bagnato l'aria viene rapidamente, e succeſſivamente applicata, ſiccome succede in tempo di vento. Perciò i

panni bagnati prestamente s' asciugano, quando sono esposti all' azione di un po' di vento. L' acqua, che tiene in dissoluzione l' aria dell' atmosfera, benchè, rigorosamente parlando, sia diversa dal vapore, in cui si riduce mediante l' azione del fuoco, non essendo essa altro, che acqua aderente alle particelle dell' aria, laddove il vapore è acqua combinata colla materia del fuoco, che le dà l' aeriformità; ciò non ostante la comprendo nel Problema, che siegue, per potermi esprimere più brevemente sotto il nome di vapore.

PROBLEMA III.

Ritrovare appresso a poco, se i vapori, che si sollevano dalla superficie del mare, sieno sufficienti al mantenimento di tutti i fiumi della Terra.

148. PAre, che la quantità dei vapori sollevati dalla superficie del mare sì per via del caldo, come per via della forza solutiva dell' aria si possa almeno stabilire uguale a quella, che manderebbe la superficie del mare, se dappertutto in tutto l' anno in tempo soltanto di giorno, anzi in tempo di Sole 12 ore regnasse quel grado di calore, che si sente in Londra nell' Estate. In questa ipotesi, che, se pecca, pecca solamente di difetto, poichè la superficie del mare

$= \frac{1}{5} . 193492440$ miglia quadrate, ſiccome ſi vedrà a suo luogo (383.) $= \frac{1}{5} . 193492440 . 3600000000$ pollici quadrati, dovrà eſſere la quantità dei vapori sollevati dalla superficie del mare in un anno $=$

$$\frac{3 . 1351 . 6 . 193492440 . 3600000000 . 365}{5 . 35 . 1440 . 1728 . 125000000000}$$

miglia cubiche.

Ora di queſti vapori una metà al più deve ricadere in mare, oſſia l'acqua, in cui eſſi ſi condensano, in forma di pioggia, oſſia in forma di neve, oſſia in forma di grandine, nebbia ec. Diſſi *al più*, quantunque la superficie del mare ſia maggiore del reſto della superficie della Terra, ritrovandoſi in queſt' ultima parte le montagne principalmente, che fermano i venti, ed obbligano i vapori, ch' eſſi portano, a condensarſi. Ond' è, che nei luoghi montuoſi piove sempre più, che nei piani, ſiccome dimoſtrano le oſſervazioni fatte. Adunque la quantità dei vapori ridotti in acqua, i quali in un anno cadono nella parte asciutta della Terra, dev' eſſer $=$

$$\frac{3 . 1351 . 6 . 193492440 . 3600000000 . 365}{2 . 5 . 35 . 1440 . 1728 . 125000000000} =$$

56794 miglia cubiche in circa. Ora queſta quantità è quindici e più volte maggiore di quella, che in un anno tributano al mare tutti i fiumi della Terra, eſſendo, ſiccome ſi vedrà a suo luogo (383.), queſt' ultima quantità $= 3616$ miglia cubiche in circa. Ciocchè ec.

149. *Scolio*. Ma oltre i vapori, che ci somminiſtrano le acque del mare, avvi anche l'evaporazione delle acque dolci della superficie asciutta della Terra dei fiumi cioè, dei laghi, delle paludi, e dei terreni umidi. Che più? Le ſteſſe acque sotterranee ne danno un'abbondante quantità. Ond'è, che appreſſo gli Antichi ſi faceva uso del seguente artifizio per ritrovare le acque sotterra, quando ſi voleva scavare un pozzo, ſiccome abbiamo in Vitruvio. Innanzi il levare del Sole usciva in campagna aperta l'inveſtigatore delle acque occulte, e ſi diſtendeva boccone a terra, appoggiando su di queſta il mento in modo, che l'occhio libero foſſe a livello dell'orizzonte. Se in qualche luogo vi oſſervava un fumo vaporoso, che a guisa di tenuiſſima nebbia su ſi levava ondeggiando, da ciò ne inferiva egli con molta probabilità, eſſere ivi dell'acqua sepolta, e quindi doverſi ivi scavare il pozzo. Dove dunque va il sopravvanzo dei vapori sollevati per l'atmosfera, mi ſi dimanderà? Una parte, rispondo, dell'acqua, in cui eſſi ſi riducono, s'inſinua per gli meati della superficie della Terra, e sotto di queſta forma una infinità di vene d'acqua, dei ruscelli, e dei fiumi eziandio, che lentamente scorrono verso il mare. Un'altra parte serve di bevanda agli animali, e di alimento alle piante, che molto ne aſſorbiscono anche coi loro rami, e colle loro foglie, ſiccome dal consumo dell'acqua, che giornalmente ſi fa per rinfrescare una

sola pianta posta in un piccol vase, si può facilmente dedurre. Un' altra finalmente si riduce in vapori, e si sublima di nuovo nell'atmosfera non venendo i vapori, che sollevati formano le nuvole, solamente dal mare, ma ancora dai continenti, e dalle isole.

150. *Coroll.* I. Poichè l' acqua, che va al mare, gli rimette l' altra, che n' esce dal medesimo sotto la forma di vapore, s' intende la ragione, perchè il mare, quantunque riceva continuamente immensi volumi di acqua e per via della pioggia, che cade sulla di lui superficie, e per via dei fiumi, e per via in fine dei canali sotterranei, non oltrepassa mai i confini prescrittigli dall' Autore dell' Universo, nè inonda la parte abitabile della Terra.

151. *Coroll.* II. Quindi anche s' intende, perchè le sorgenti dei fiumi si trovano ordinariamente nei luoghi montuosi. Le montagne, sollevandosi molto nell'atmosfera, fermano le nuvole, mentre queste vengono portate dai venti, presentano maggior superficie alle pioggie, e alle nebbie, nelle quali si riducono i vapori, si cuoprono anche più spesso di nevi, che a poco a poco liquefandosi producono scorrimenti perpetui d' acqua, i più dei quali restano nascosti nei dirupi, o nella terra, e non sbuccano se non nei siti più bassi, o molto innanzi nelle pianure.

152. *Coroll.* III. Quindi è nata anche l'opinione di alcuni Fisici, che per la ruinosa caduta

delle acque, che scavano, e trasportano sassi, ghiaje, arene, e terre, scemandosi notabilmente coll'andar del tempo le altezze, e superficie delle montagne, venga anche a scemarsi notabilmente in moltissimi fiumi la copia delle acque. Imperocchè diventando minore l'estensione degli obici, che oppongonsi al libero giro, e trasporto dei vapori, minor anche devesi render la quantità di quelli, che vengono obbligati a condensarsi, ossia che cadono in forma di acqua.

153. *Scolio*. L'evaporazione toglie al Mediterraneo una quantità di acqua molto maggiore di quella, ch'esso riceve dai fiumi, che vi sboccano. La di lui estensione è sette in otto volte maggiore di quella del Mar Nero. Eppure la quantità dell'acqua, che dai fiumi esso riceve, non è maggiore. Donde dunque avviene, che il Mediterraneo conserva appresso a poco la stessa copia delle sue acque? Proviene dalle acque, che lo stesso riceve dall'Oceano per via dello stretto di Gibilterra, e dal Mar Nero per via del Bosforo nel mar di Marmora, e di là per lo stretto de'Dardanelli nel mar della Grecia. L'acqua però, che somministra al Mediterraneo l'Oceano, è di gran lunga maggiore di quella, che gli tributa il Mar Nero. Imperocchè il Bosforo nel passaggio più angusto non ha se non 800 passi di larghezza, laddove lo stretto di Gibilterra ne ha più di 5000 nel sito più stretto, e supposte le celerità eguali sì nell'uno, come nell'

altro ſtretto, quello di Gibilterra ha una profondità aſſai più grande. Per lo contrario l'evaporazione toglie al Mar Nero una quantità d'acqua minore di quella, che vi portano gl'influenti, ſiccome ſi raccoglie dalle acque, che il Bosforo conduce nel Mediterraneo, senzachè notabilmente ſi scemi il volume delle di lui acque. Nè ciò ci può parere ſtrano, se ſi rifletre alla gran copia delle acque, che portano al Mar Nero i fiumi. Niſſun però di queſti è paragonabile al Bosforo della Tracia rispetto alla portata delle acque, checchè ne dicano alcuni Scrittori. Anche la quantità dell'acqua, che perdono i noſtri Laghi per via della evaporazione, è minore di quella, che vi ricevono dagl'influenti. Perciò hanno eſſi gli emiſſarj per portar via l'ecceſſo delle loro acque.

PROBLEMA IV.

Dato il volume, in cui ſi spande l'acqua, allorchè mediante l'azione del fuoco ſi converte in vapori, trovare appreſſo a poco in qual numero di particelle eſſa ſi risolve.

154. SI supponga, che in un pollice di vapori vi ſieno tante particelle, quante poſſono eſſere le di lui parti viſibili, quantunque il loro numero ſia forse maggiore. Nella lunghezza di un pollice vi sono almeno 200 parti viſibili, giacchè in

alcuni ſtrumenti matematici trovaſi il pollice diſtinto in 100 diviſioni, ed un attento Oſſervatore può anche senza difficoltà discernere la metà. Però sarà il numero delle parti viſibili di un pollice quadrato = 40000, e quello delle parti viſibili di un pollice cubico = 8000000, benchè, volendo rigorosamente parlare, il numero delle parti viſibili sì del pollice quadrato, come anche cubico debb' eſſer molto più grande, essendo una superficie quadrata più viſibile della sua linea generatrice, e un cubo molto più viſibile d' una delle sue superficie quadrate. Ora ſi ponga, che il calore, che converte l' acqua in vapori, ſia quello dell' acqua bollente. Poichè col mezzo di queſto calore tre once di acqua ſi riducono, ſiccome abbiam (142.) ritrovato, in 64800 pollici cubici di vapori, ſi troverà in queſt' ipoteſi il numero delle particelle vaporose, nelle quali quelle sono ſtate convertite, = 64800. 8000000 = 518400000000. Perciò il numero delle particelle vaporose, nelle quali ſi risolve un' oncia d' acqua = 172800000000. Nello ſteſſo modo ſi deve procedere, quando ſi tratta di vapori generati da un minor grado di calore, giacchè l' acqua, allorchè bolle, ha il maſſimo grado di calore sotto la ſteſſa preſſione dell' aria. Ciocchè ec.

PROBLEMA V.

Dato il volume, in cui si spande l'acqua, allorchè dall'azione del caldo viene ridotta in vapore, determinare, se questo può secondo le leggi dell'Idrostatica sollevarsi per l'atmosfera.

155. Si cerchi in primo luogo il volume x, che deve avere l'aria dell'atmosfera presso la Terra, perchè possa avere lo stesso peso, che il volume v di acqua. Poichè la gravità specifica dell'acqua stà alla gravità specifica dell'aria presso la Terra $= 800 : 1$, e poichè due corpi di egual quantità di materia, ossia di egual peso hanno le densità, ossia le gravità specifiche in ragione inversa dei loro volumi, se si farà $v : x = 1 : 800$, si troverà il volume x equiponderante dell'aria $= v. 800$. Ora si ponga, che l'acqua si spanda, allorchè dall'azione del fuoco viene ridotta in vapore, in uno spazio 14000 volte maggiore di quello, ch'essa occupa, siccome fa il vapore dell'acqua bollente, e si cerchi il volume y, che deve avere quell'acqua ridotta in vapore, affinchè possa pesare ugualmente, che il volume v di acqua. Si troverà il volume $y = v. 14000$ Quindi, poichè le gravità specifiche di due corpi equiponderanti sono in ragione inversa dei volumi, deve stare la gravità specifica dell'aria alla gravità specifica

dell'acqua ridotta in vapore $= v.\ 14000 : v.\ 800 = 35 : 2$. Onde, essendo la gravità specifica dell' acqua ridotta in vapore notabilmente minore della gravità specifica dell' aria presso la Terra, deve essa, siccome richiedono le leggi idrostatiche, sollevarsi per l'atmosfera. Lo stesso ha luogo anche negli altri vapori, che vengono generati da un calore minore di quello dell'acqua bollente, purchè il volume, in cui essi si spandono, sia più di 800 volte maggiore di quello, che aveano nello stato di liquidità, siccome realmente l'hanno maggiore almeno 1200 volte. Ciocchè ec.

156. *Scolio*. Si può dare più brevemente la soluzione in quest'altro modo. Si chiami S la gravità specifica dell' acqua, s quella dell' aria, s' finalmente quella dell' acqua bollente ridotta in vapori. Egli è chiaro, che sarà $S : s = 800 : 1$, e $S : s' = 14000 : 1$. Però, essendo $s.\ 8000 = s'.\ 14000$, dev' essere anche $s : s' = 14000 : 800 = 35 : 2$. Qui giova avvertire, che i vapori così chiamati impropriamente, che non sono in realtà, che acqua disciolta dall' aria dell' atmosfera, non posson per questa innalzarsi per via della loro respettiva leggierezza, non essendo essi, che acqua nello stato di liquidità. Come dunque s'innalzano? S'innalzano in virtù della mutua affinità, che regna fra le loro particelle, e quelle dell' aria, siccome ascende per l' acqua il sale disciolto, quantunque specificamente più grave, e si distribuisce uniformemente per tutta la di lei massa.

PROBLEMA VI.

Dato il volume, in cui si spande l'acqua, allorchè dall'azione del caldo vien ridotta in vapore, ritrovare l'altezza, in cui questo s'arresta, purchè nella sua ascesa conservi lo stesso grado di calore, nè incontri verun impedimento.

157. Il vapore dell'acqua bollente in virtù della sua specifica minor gravità s'innalza per l'aria, siccome abbiam ritrovato. Ma fin dove? Sino a quell'altezza, in cui la gravità specifica dell'aria è uguale alla di lui, secondochè richiedono le leggi dell'Idrostatica. Quindi, poichè la gravità specifica dell'aria è $17\frac{1}{2}$ volte maggiore di quella del vapore dell'acqua bollente, deve questo salire, finchè nel suo viaggio incontri un'aria $17\frac{1}{2}$ volte più rara della stessa presso la Terra. Ma ciò è vero I., purchè il vapore nella stessa conservi lo stesso grado di calore. Se il vapore perdesse qualche parte del suo calore, non potrebbe allora salire a quell'altezza, diventando in questo caso la sua specifica gravità maggiore per essere le sue parti ristrette sotto minor volume. II., purchè il vapore non incontri nella sua ascesa verun impedimento sì dalla parte dell'aria, come anche dalla parte delle cause estrinseche. Tali possono essere i venti, il fluido elettrico ec.

Egli è chiaro, che, presi in una colonna dell' atmosfera tre luoghi A, B, C, qualunque questi sieno, le loro distanze dalla cima dell' atmosfera debbon essere i logaritmi delle densità dell' aria in quegli stessi luoghi, ossia, poichè le densità sono proporzionali ai pesi comprimenti, debbon essere i logaritmi delle altezze del mercurio nel barometro trasportato in quegli stessi luoghi, siccome abbiamo insegnato nella Idrostatica (273.). Ora si ponga il luogo A alla riva del mare, dove l' altezza del mercurio suol essere, ordinariamente parlando, di 28 pollici, ossia di 336 linee, e il luogo B all' altezza di 76 piedi parig. al di su della superficie del mare, dove trasportato il barometro, discende il mercurio per una linea, ossia dove l' altezza del mercurio è di 335 linee. Ognun vede, che, posto il luogo C, dove il vapore dell' acqua bollente s' arresta secondo l' Idrostatica, ossia dove la densità dell' aria dell' atmosfera è $17 \frac{1}{2}$, ossia $\frac{35}{2}$ volte minore, che alla superficie della Terra, ovvero alla riva del mare, dev' esser l' altezza del mercurio in quel luogo $= \frac{336 \cdot 2}{35} = 19$ linee in circa. Si cerchi poscia l' altezza del luogo C dell' atmosfera sopra il luogo B della stessa. A questo fine cerco i logaritmi delle altezze del mercurio nei luoghi A, B, C, e trovo, facendo uso delle Tavole trigonometriche del Sig. Toaldo, il log. di 336 = 25263393,

il log. di 335 = 25250448, e il log. di 19 = 12787536.

Essendo le differenze dei logaritmi sensibilmente proporzionali alle differenze dei numeri corrispondenti, se si farà 25263393 — 25250448 : 25250448 — 12787536 = 76 : x, ossia 12945 : 12462912 = 76 : x, si troverà l'altezza x del luogo C dell'atmosfera, dove s'arresta il vapore dell'acqua bollente, sopra il luogo B = $\frac{12462912 . 76}{12945}$ piedi parig. Quindi se a quest'altezza si aggiungerà quella di B sopra il luogo A, si avrà finalmente l'altezza della elevazione del vapore dell'acqua bollente sopra la superficie del mare = $76 + \frac{12462912 . 76}{12945} = 73245$ piedi parigini. Nello stesso modo si procederà per ritrovare l'altezza della sospensione degli altri vapori generati da un calore minore di quello dell'acqua bollente. Ciocchè ec.

158. *Scolio*. Ma qui han luogo gli avvertimenti già stati accennati nella nostra Idrostatica, dove abbiamo insegnata la maniera di ritrovare col mezzo del barometro le altezze delle montagne.

C A P O VI.

Della misura dell' acqua fluente, allorchè l' altezza del foro scolpito in uno dei lati non è molto piccola rispetto a quella del vase.

159. Fin qui abbiam supposto il foro laterale sì piccolo, che si potessero tutti i suoi punti considerare come ugualmente distanti dalla superficie del fluido contenuto. Succede però molte volte negli usi della vita, che il foro laterale, quantunque piccolo riguardo all' ampiezza del vase, non ha tutti i punti della sua altezza alla stessa sensibile profondità. Come dunque si ha in questo caso da determinare la quantità assoluta dell' acqua fluente? L' esperienza c' insegna, che anche in questo caso ciascuna particella dell' acqua sorte dal foro con quella velocità, che conviene alla di lei distanza dalla superficie dell' acqua nel vase. Ognun vede, ch' essendo varia la velocità delle particelle fluenti secondo la varietà delle loro profondità, non si può fare il calcolo giusta il metodo già insegnato. Come dunque? Ecco in qual modo.

P R O B L E M A I.

Ritrovare la quantità dell' acqua fluente in un dato tempo da un foro laterale di qualun-

que figura, allorchè l'altezza di questo non è molto piccola rispetto a quella del vase.

160. SI divida tutta l'apertura del foro in un numero grande di piccoli rettangoli, o trapezj, tirandovi delle linee orizzontali, sicchè abbia ciascun di questi tutti i proprj punti sensibilmente equidistanti dalla superficie del fluido contenuto. Si consideri poscia ciascun degli stessi come un piccol foro, e se ne cerchi la quantità dell'acqua, che ne sorte nel dato tempo (100.). Fatta in fine la somma di tutte queste quantità parziali, si avrà la quantità totale dell'acqua, che nel dato tempo sorte dal dato foro laterale. Ciocchè ec.

161. *Scolio*. Si vede, che questo metodo, oltrechè sommamente è lungo, non dà, se non imperfettamente la misura dell'acqua fluente. Affine di averla con tutta l'esattezza bisogna considerare i piccoli rettangoli, o trapezj, nei quali è stato diviso tutto il foro, come se fossero infinitesimi, e ricercarne poscia matematicamente la somma delle quantità dell'acqua fluente da ciascun di essi nel dato tempo. Questa somma non si ottiene per lo più, se non coll'ajuto del calcolo infinitesimale, ed ecco in qual modo. Si ponga ADCB (fig. 16.) un foro quadrato, che abbia il suo lato superiore AB nella stessa superficie dell'acqua nel vase. Si tiri il diametro

AC, poscia l'orizzontale MN, e presa l'infinitesima Mm dell'altezza AD si conduca all'orizzontale MN la parallela mn. Finalmente si supponga $AD = a$, $AM = x$, $Mm = dx$. Egli è chiaro, che il trapezio $MOom$ si può senza error notabile considerare uguale al rettangolo $MOgm$. Adunque sarà il trapezio $MOom = MO.Mm = xdx$, essendo $AM = MO$, attesa la proporzione $AM : MO = AD : DC$, nella quale i lati AD, DC del quadrato ADCB sono eguali. Ora si moltiplichi l'area xdx per la velocità assoluta dell'acqua nel punto M, ossia per $\sqrt{x.2g}$ (39.): sarà la quantità razionale dell'acqua, che passa per quell'area, come per un piccolo foro, in un secondo, $= xdx.\sqrt{x.2g} = x^{\frac{3}{2}} dx \sqrt{2g}$. Quindi la quantità dell'acqua fluente in un secondo dal triangolo MAO sarà $= \int x^{\frac{3}{2}} dx \sqrt{2g} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{2g}$. Si ponga $MA = DA$, ossia $x = a$: sarà la quantità dell'acqua fluente in un secondo dall'intiero triangolo $DAC = \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} \sqrt{2g} = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{a.2g}$. Colla stessa facilità si ritrova anche la quantità dell'acqua fluente nello stesso tempo dal quadrato ADCB. Essendo $MN = AD$, sarà il rettangolo $MNnm = adx$; e perciò la quantità dell'acqua, che passa in un secondo per quel rettangolo, $= adx.\sqrt{x.2g} = ax^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{2g}$. Fatta l'integrazione di questa quantità, e, fatto $AM = AD$, ossia $x = a$,

$x = a$, si troverà la quantità dell'acqua fluente in un secondo dal quadrato ADCB $= \frac{2}{3} a^2 \sqrt{a \cdot 2g}$. Nello stesso modo potrei ritrovare le quantità d'acqua somministrate da altri fori di altre figure, e sotto anche qualunque profondità, se non mi fossi proposto in questa Instituzione di far uso soltanto dei primi principj della Matematica.

PROBLEMA II.

Ritrovare la quantità dell'acqua, che in un dato tempo sorte da un foro rettangolare, e verticale scolpito in uno dei lati di un vase.

162. Si ponga ADCB un lato di un vase prismatico pieno costantemente di acqua. Si ponga inoltre aperto in quel lato il foro rettangolare, e verticale PQqp (fig. 4.), e dal punto d di mezzo del lato inferiore Qq del foro si alzi fino alla superficie dell'acqua la perpendicolare do, e intorno di questa, come attorno di un'asse col parametro OL $= 2g$ si descriva la parabola OnZ. Egli è chiaro, che la quantità dell'acqua, che in un secondo passa per l'altezza dM del foro rettangolare PQqp, sarà eguale all'area del segmento MmZd della parabola OnZ, essendo i filamenti d'acqua, che in un secondo sortono dai punti M, R ec. come

da tanti fori eguali alle corrispondenti ordinate Mm, Rr ec. (40.). Quindi è, ch'essendovi nel foro $PQqp$ tante linee verticali dM, quanti sono i punti della base Qq, la quantità dell'acqua, che sorte in un secondo dal foro $PQqp$, dev'essere eguale al prodotto della base Qq del foro nell'area del segmento $MmZd$ della parabola OnZ, ossia poichè l'area di questo segmento $= OZd - OmM = \frac{2}{3} dO . dZ - \frac{2}{3} MO . Mm$ (34.), dev'esser $= Qq . (\frac{2}{3} dO . dZ - \frac{2}{3} MO . Mm)$, ossia finalmente, poichè $dZ = \sqrt{dO . 2g}$, e $Mm = \sqrt{MO . 2g}$ (40.), dev' esser $= Qq . \left(\frac{2}{3} dO \sqrt{dO . 2g} - \frac{2}{3} MO \sqrt{MO . 2g}\right)$. Si chiami ora t il numero dei secondi, che si contengono nel dato tempo, b la base inferiore Qq del foro. A l'altezza dell'acqua nel vase al di sopra della base inferiore Qq, a in fine quella della stess'acqua al di sopra della superiore Pp dello stesso foro. Si troverà, fatta la sostituzione, la quantità fluente nel dato tempo dal dato foro, ossia $Q = bt . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g}\right)$. Ciocchè ec.

163. *Scolio.* La quantità dell'acqua ritrovata è la razionale. Onde per avere l'attuale bisogna prendere $\frac{5}{8}$ di quella; il che ha luogo in tutta la dottrina di questo Capo.

164. *Coroll.* Se il foro rettangolare, e ver-

ticale avrà la sua base superiore nella stessa superficie dell'acqua nel vase, ossia se il dato foro sarà HS*sh*, poichè in questo caso $a = o$, dovrà la quantità $- \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g}$ esser $= o$. Onde la quantità dell'acqua, che sorte da un foro rettangolare, e verticale in un dato tempo, quand'esso ha il suo lato superiore nella stessa superficie dell'acqua nel vase, è $= bt . \frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g}$, ossia, chiamata l'area del foro f, $= \frac{2}{3} ft \sqrt{A . 2g}$, essendo in questo caso l'area del foro $= Ab$. Quindi, se di più il foro sarà quadrato, poichè $f = A^2$, sarà la quantità dell'acqua fluente in un secondo $= \frac{2}{3} A^2 \sqrt{A . 2g}$, essendo in questo caso $t = 1$, giust'appunto, siccome abbiam già dimostrato (161.).

PROBLEMA III.

Si supponga scolpito nel fondo di un vase un foro rettangolare uguale al foro rettangolare, e verticale PQqp *scolpito nel lato* ADCB: *si dimanda l'altezza, che deve aver l'acqua contenuta in quel vase, affinchè dentro di un dato tempo possa sortire per il foro scolpito nel fondo tant'acqua, quanta dentro lo stesso tempo ne sorte per l'altro.*

165. Si ponga x l'altezza ricercata al di sopra del foro scolpito nel fondo. Egli è chiaro, che,

chiamata f l'area di questo foro, t il tempo dello scolo, dev' esser la quantità dell' acqua fluente da quel foro $= ft\sqrt{x.2g}$ (100). Quindi è, che, dovendo questa quantità d'acqua essere eguale a quella, che dal foro PQqp sorte nello stesso tempo, dev' essere $ft\sqrt{x.2g}$ $= bt.\left(\frac{2}{3}A\sqrt{A.2g} - \frac{2}{3}a\sqrt{a.2g}\right)$ (141.), ossia $f\sqrt{x} = b.\left(\frac{2}{3}A\sqrt{A} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}\right)$, ossia finalmente, poichè $f = b.\overline{A-a}$, e perciò $f^2 = b^2.\overline{A-a}^2$, $x = 4.\frac{(A\sqrt{A} - a\sqrt{a})^2}{9.\overline{A-a}^2}$.

Ciocchè ec.

166. *Coroll.* I. Se il foro rettangolare, e verticale ha la sua base superiore nella stessa superficie dell'acqua nel vase, diventa in questo caso $a = 0$. Però $x = \frac{4A^3}{9A^2} = \frac{4}{9}A$, eguale cioè a quattro none parti dell' altezza del foro, preso il principio della numerazione dalla superficie dell' acqua.

167. *Coroll.* II. Quindi ne siegue la soluzione di quest' altro Problema: *ritrovare l' altezza media dell' acqua fluente da un foro rettangolare, e verticale*, ossia quell' altezza, che se fosse comune a tutte le particelle dell' acqua, che passa per quel foro, sortirebbe da esso in

egual tempo tant' acqua, quanta ne sorte realmente sotto le loro differenti profondità, essendo quest' altezza media non diversa dall' altezza, che abbiamo ritrovata (165.). Perciò, chiamata M quest' altezza media, dev' esser $M = \frac{4}{9} A$, allorchè il foro rettangolare, e verticale ha la sua base superiore nella stessa superficie dell' acqua nel vase, oppure $M = 4 . \frac{(A \sqrt{A} - a \sqrt{a})^2}{9 . \overline{A - a}^2}$, allorchè stà al di sotto di essa.

168. *Scolio*. L' altezza media è minore della retta RO verticale, che misura la distanza del centro R del foro rettangolare $PQqp$ dalla superficie dell' acqua, quantunque la differenza non sia grande. Posta la distanza A della base inferiore Qq del foro di $1 + \frac{1}{2}$ piedi, la distanza a della superiore Pp di $1 + \frac{1}{3}$ piedi parigini, trovasi l' altezza media $= 16$ pollici, $10 + \frac{1}{3}$ linee in circa. Onde l' eccesso della RO è di $1 + \frac{2}{3}$ linee, essendo RO di 17 pollici. La differenza, che avvi fra la retta RO, e l' altezza media, vieppiù si scema a misura, che cresce, *caeteris paribus*, la distanza del foro $PQqp$ dalla superficie dell' acqua nel vase, cosicchè, se l' altezza MO è di molti piedi, si può senza error notabile considerare la retta RO per altezza media dell' acqua al di sopra del foro. Infatti a misura, che cresce l' altezza MO, l' arco MZ della parabola più si accosta alla linea

M 3

retta. Si ponga dunque l'altezza MO sì grande, che si possa prendere l'arco mZ della parabola fisicamente come una retta. Sarà il segmento parabolico $MmZd$, che dà la misura della quantità dell'acqua fluente in un secondo dalla linea verticale dM del foro, un trapezio rettilineo. Ma ben si vede, che la retta RO è in questo caso l'altezza media, essendo la quantità dell'acqua, che sorte in un secondo dalla retta dM eguale a quella che sortirebbe dalla stessa nello stesso tempo, se essa fosse situata orizzontalmente sotto la profondità RO, per essere il segmento parabolico $MmZd$, ossia il trapezio $MmZd$ eguale al rettangolo compreso sotto le rette dM, Rr, ossia al rettangolo $dMba$, attesa l'eguaglianza dei due triangoli mrb, arZ.

169. *Coroll.* II. Quindi ne siegue anche la soluzione di quest' altro Problema: *ritrovare la velocità media dell' acqua fluente da un foro rettangolare, e verticale*, quella cioè, che, se avesse l'acqua fluente in ciascun punto del foro, sortirebbe da questo dentro lo stesso tempo la stessa quantità d'acqua, che realmente sorte con disuguale velocità, ricercando col mezzo dell' equazione $v = \sqrt{a.2g}$ (39.) la velocità, che conviene alla media altezza a. Se RO è la media altezza dell'acqua fluente dal foro rettangolare, e verticale, la velocità media della stessa acqua fluente sarà $= Rr$, essendo $Rr = \sqrt{RO.OL}$

$= \sqrt{a \cdot 2g}$. Ond'è anche, che la linea orizzontale tirata per l'estremità R della media altezza RO secondo la larghezza del foro PQqp si chiama *la linea* della media velocità dell'acqua fluente da quel foro.

170. *Scolio*. La velocità media dell'acqua fluente da un foro rettangolare, e verticale si ritrova anche in questo altro modo. Se tutte le particelle, che passano per il foro PQqp, avessero la media velocità x, la quantità dell'acqua fluente nel tempo t sarebbe $= ftx$ (100.). Ma, poichè questa quantità è affatto eguale a quella, che nello stesso tempo sorte dallo stesso foro realmente con varia velocità, dev'esser ftx $= bt \cdot \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A \cdot 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a \cdot 2g} \right)$. Perciò $x = \frac{2bA\sqrt{A \cdot 2g} - 2ba\sqrt{a \cdot 2g}}{3f}$, ossia, essendo $f = b \cdot \overline{A - a}$, $x = \frac{2A\sqrt{A \cdot 2g} - 2a\sqrt{a \cdot 2g}}{3 \cdot \overline{A - a}}$. Quando il foro rettangolare ha la sua base superiore nella stessa superficie dell'acqua nel vase, allora $a = 0$; e perciò $x = \frac{2}{3} \sqrt{A \cdot 2g}$.

171. *Coroll.* III. Ritrovata l'altezza media dell'acqua fluente, si ha facilmente la quantità dell'acqua, che dentro di un dato tempo sorte da un foro rettangolare, e verticale, considerando questo stesso foro, come se fosse orizzontale

e prendendo per altezza del fluido contenuto la media altezza, ossia facendo uso di quest'equazione $Q = ft\sqrt{a \cdot 2g}$, dove a esprime l'altezza media del fluido contenuto. Similmente ritrovata la velocità media si ha anche facilmente la quantità dell'acqua fluente, servendosi di quest'altra equazione $Q = ftv$, dove v esprime la velòcità media.

PROBLEMA IV.

Ritrovare la quantità dell'acqua, che in un dato tempo esce da un foro verticale, e circolare scolpito in uno dei lati di un vase.

172. IN un lato di un vase pieno costantemente di acqua vi si è aperto un foro circolare del diametro di 2 pollici alla profondità di $1 + \frac{5}{12}$ piedi, ossia di 17 pollici parigini al di su del centro. Si dimanda la quantità dell'acqua, che deve somministrare quel foro in due minuti? Il Sig. Ab. Bossut ha dimostrato col mezzo del calcolo infinitesimale, che, chiamata A l'altezza media dell'acqua, r il raggio del foro circolare, n il numero delle volte, che la distanza del centro del foro della superficie dell'acqua nel vase contiene il raggio, cosicchè nr sia eguale alla suddetta distanza, ha dimostrato, dico, che

$A = nr . \left(1 - \frac{1}{16 n^2} - \frac{9}{1024 n^4} - \text{ec.} \right)$, ossia

$A = nr - \frac{nr}{16 n^2} - \frac{9 nr}{1024 n^4}$ prossimamente.

Si cerchi adunque l'altezza media dell'acqua fluente da quel foro. Poichè il raggio di questo è di 1 pollice, sarà $n = 17$, $nr = 17$ pollici; e perciò $A = 17 - \frac{17}{16 . 17 . 17} - \frac{9 . 17}{1024 . 17 . 17 . 17 . 17} = 17 - \frac{1}{16 . 17} - \frac{9}{1024 . 17 . 17 . 17} = 17$ pollici meno un mezzo punto in circa. In questo caso adunque si può prendere senza pericolo di error notabile per altezza media la distanza del centro del foro dal livello dell'acqua nel vase, ossia 17 pollici.

Si consideri ora il foro circolare, come se fosse situato al fondo di un vase pieno costantemente di acqua fino all'altezza di 17 pollici, e si cerchi la quantità dell'acqua fluente da quel foro nel dato tempo, facendo uso dell'equazione $Q' = \frac{5}{8} f t \sqrt{a . 2g}$ (100.). Essendo $f = \frac{22}{7}$, $t = 2$ minuti primi, ossia $= 120$ secondi, $a = 17$ pollici, fatta la sostituzione, si avrà $Q' = \frac{5}{8} . \frac{22}{7} . 120 . \sqrt{17 . 724} = 26141$ in circa pollici cubici. Ciocchè ec.

173. *Coroll.* I. Poichè A è minore di nr,

ne siegue, che l'altezza media dell'acqua fluente per un foro circolare, e verticale scolpito in uno dei lati del vase è sempre minore della distanza del centro del foro della superficie dell'acqua contenuta.

174. *Coroll.* II. Poichè, crescendo la profondità del foro, cresce anche il valore della quantità n; e perciò si scema nella equazione di sopra il valore delle frazioni negative, deve a misura, che cresce la suddetta profondità, l'altezza media dell'acqua fluente vieppiù accostarsi ad essere eguale alla distanza del centro del foro dalla superficie dell'acqua nel vase, cosicchè si possa considerare come sensibilmente eguale, allorchè la profondità del foro è notabile.

175. *Scolio.* Noi abbiamo qui trattato in particolare della misura dell'acqua fluente per li fori laterali di figura soltanto rettangolare, e circolare, essendo questi i fori, che ordinariamente si adoperano negli usi della vita civile. Chi desidera di leggere la presente dottrina sviluppata con tutta la generalità, e con tutto il lusso analitico, deve consultare principalmente i non mai bastevolmente lodati Supplementi del Chiariss. P. Fontana delle Scuole Pie all'Idrodinamica dell' Ab. Bossut.

APPENDICE.

Dell' uso della dottrina precedente nella misura delle acque fluenti dalle bocche d' irrigazione.

176. IL modello, con cui si misurano nel distretto di Milano, ed a cui come ad unità si riferiscono le bocche d'irrigazione, chiamasi *oncia di acqua*. Questa si è una bocca rettangolare, e verticale larga tre, e alta quattro once del braccio milanese, il lato superiore della quale stà due once al di sotto della superficie dell'acqua, cosicchè da questa dista l'inferiore sei once dello stesso braccio. L'altezza delle due once, che ha l'acqua premente al di sopra del lato superiore della bocca, chiamasi volgarmente *il battente*. Quindi è, che, se una bocca d'irrigazione sotto la suddetta altezza, e battente ha la base di 6, di 9, di 12 ec. once, essa allora dicesi di due, di tre, di quattro ec. once di acqua, essendo essa eguale a due, a tre, a quattro ec. once di acqua, siccome chiaramente s'intende, alzando ad ogni tre once una perpendicolare alla base.

177. *Scolio.* Quest'oncia di acqua si chiama *Milanese*, perchè di essa si fa uso nel distretto di Milano. Non si deve però confonderla con quelle altre, che si adoperano negli altri distretti della Lombardia Austriaca. L'oncia *Mantovana* è una bocca quadrata, e verticale dell'altezza, e lar-

ghezza di un braccio Mantovano, e del battente di due once. L'oncia *Pavese* non è diversa dalla Milanese se non nella misura del braccio, adoperandosi nella misura dell'altezza, della base, e del battente di quella il braccio Pavese. L'oncia *Cremonese* è una bocca rettangolare, e verticale della larghezza di una sola, e dell' altezza di dieci once del braccio Cremonese senza battente. Io qui parlo soltanto dell'oncia d'acqua Milanese, potendosi agevolmente applicare anche alle altre tutto ciò, che di essa si dimostra. Non debbo però ommettere, che qui si considera l'acqua, che sorte dalla bocca d'irrigazione, come espulsa fuori dalla pressione dell' acqua superiore. Però se il moto dell'acqua nel canale di derivazione è notabile, bisogna far in modo, che l'acqua avanti il suo passaggio per la bocca, prendendo la sua velocità, diventi sensibilmente stagnante, se si vuole, che la misura dell'acqua fluente sia esatta.

TEOREMA.

Le quantità dell' acqua, che somministrano nello stesso tempo due bocche d' irrigazione, sono fra loro in ragione delle basi delle stesse bocche.

178. Sieno date le bocche d'irrigazione M, N: le loro basi si dicano B, *b*, le quantità dell'acqua,

ch'esse somministrano nello stesso tempo t, Q', q', l'altezza comune dell'acqua al di su delle loro basi, A, il lor battente finalmente a. Egli è chiaro, che sarà $Q' = \frac{5}{8} Bt . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right)$, e $q' = \frac{5}{8} bt . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right)$ (162.). Ora si paragoni l'una coll'altra quantità: si avrà $Q' : q' = \frac{5}{8} Bt . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right) : \frac{5}{8} bt . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right) = B : b$, vale a dire in ragione delle basi delle stesse bocche. Ciocchè ec.

179. *Coroll.* Poichè le quantità dell'acqua, che nello stesso tempo somministrano due bocche d'irrigazione, sono fra loro in ragione delle basi delle stesse bocche, la quantità dell'acqua, che manda una bocca di due, di tre, di quattro ec. once di acqua, sarà doppia, tripla, quadrupla ec. di quella, che nello stesso tempo manda una bocca di una sola oncia di acqua, essendo la base di una bocca di due, di tre, di quattro ec. once di acqua doppia, tripla, quadrupla di quella di una sola oncia di acqua (176.). Quindi

I. Se sarà nota la quantità assoluta dell'acqua, che manda in un dato tempo una sola oncia

di acqua, si saprà anche la quantità assoluta dell' acqua, che manda nello stesso tempo una bocca di due, di tre, di quattro ec. once di acqua, prendendo il doppio, il triplo, il quadruplo ec. della quantità assoluta dell' acqua, che in quel tempo manda una bocca di una sola oncia di acqua.

II. Se si avrà da estrarre da un canale una quantità di acqua doppia, tripla, quadrupla ec. di quella, che in un dato tempo somministra un' oncia di acqua, bisognerà alla bocca d'irrigazione dare una base doppia, tripla, quadrupla ec. di quella di una sola oncia di acqua. Onde per avere la grandezza ricercata della bocca la regola si è di moltiplicare la base di una sola oncia di acqua nel numero delle volte, che la quantità dell'acqua estraenda contiene quella di una sola oncia di acqua, ossia nel numero delle once dell'acqua estraenda.

III. Se sarà data finalmente la base di una bocca d' irrigazione, si troverà facilmente, se la quantità dell'acqua, ch'essa somministra, è doppia, tripla, quadrupla ec. di quella di una sola oncia di acqua, osservando, se essa contiene due, tre, quattro ec. volte la base di una sola oncia di acqua. Onde per sapere di quante once di acqua sia una bocca d'irrigazione, la regola si è di dividere la di lei base per quella di una sola oncia di acqua.

PROBLEMA I.

Ritrovare la quantità dell' acqua, che manda in un dato tempo un' oncia di acqua.

180. Egli è chiaro, che la quantità dell'acqua Q', che manda in un dato tempo un' oncia di acqua, dev' esser $= \frac{1}{2} B t . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right)$, venendo l' acqua espulsa fuori della bocca, siccome si suppone, dalla pressione dell'acqua superiore. Ora si cerchi la quantità dell' acqua, che manda in un' ora un' oncia d'acqua. Stando il braccio di Milano al piede di Parigi $= 11 : 6$, si troverà il numero x dei bracci equivalenti a $60 + \frac{1}{3}$ piedi di Parigi col far la proporzione, che siegue, $11 : 6 = 60 + \frac{1}{3} : x$, e sarà $x = 32 + \frac{10}{11}$ braccia, ossia poichè il braccio è composto di 52 once, $= 395$ once in circa. Quindi, essendo nell'equazione di sopra $t = 3600$ secondi, che si contengono in un'ora, $b = 3$, $a = 2$, $A = 6$ once del braccio di Milano, $2g$ finalmente $= 60 + \frac{1}{3}$ piedi di Parigi $= 395$ once dello stesso braccio, messi questi valori ai luoghi delle lettere, si avrà $Q' = \frac{1}{2} . 3 . 3600 .$

$$\left(\frac{2}{3} . 6 . \sqrt{6 . 395} - \frac{2}{3} . 2 . \sqrt{2 . 395} \right)$$

$= 1160100$ once cubiche del braccio di Milano. Ciocchè ec.

181. *Scolio*. Dalle sperienze fatte risulta, che un'oncia di acqua irriga in un giorno pertiche di Milano 36, se il terreno è arato, $43 \cdot \frac{2}{3}$ poi, s'è prato sabbioso, e poco regolare.

PROBLEMA II.

Data la quantità dell'acqua, che manda in un dato tempo una bocca d'irrigazione, qualunque essa sia, determinare la larghezza da darsi ad una bocca rettangolare, e verticale, affinchè sotto un dato battente, e sotto una data altezza mandi nello stesso tempo una eguale quantità di acqua.

182. Si ponga Q' la quantità dell'acqua, che nel tempo t manda la data bocca, x la larghezza da darsi alla nuova bocca, a il battente dato di questa, A la somma finalmente del dato battente, e della data altezza della stessa, ossia la distanza della base x dalla superficie dell'acqua. Ora si cerchi la quantità dell'acqua q', che manderebbe nello stesso tempo t una bocca rettangolare, e verticale, se avesse la base $= x$, il battente $= a$, e la data altezza. Si troverà $q' = \frac{5}{8} x t$. $\left(\frac{2}{3} A \sqrt{A \cdot 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a \cdot 2g} \right)$. Laonde, dovendo

vendo essere $Q' = q'$, siccome si dimanda, deve esser $Q' = \frac{5}{8} x t . \left(\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g} \right)$; e

quindi $x = \frac{8 Q'}{5 t . (\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g})}$.

Ciocchè ec.

PROBLEMA III.

Ridurre alla Milanese un' oncia d' acqua, qualunque questa sia.

183. LA soluzione del presente è un corollario del Problema precedente. Imperocchè, trovata la quantità dell'acqua Q', che manda in un dato tempo t la data oncia di acqua, per esempio, la Mantovana, che si vuole ridurre alla Milanese, in once cubiche del braccio di Milano, siccome abbiam già insegnato (180.), si troverà la larghezza da darsi alla bocca Milanese, affinchè nel tempo t mandi una quantità d'acqua eguale a quella, che nello stesso tempo manda la Mantovana, ossia si avrà $x = \frac{8 Q'}{5 t . (\frac{2}{3} A \sqrt{A . 2g} - \frac{2}{3} a \sqrt{a . 2g})}$, dove $A = 6$, $a = 2$ once del braccio di Milano. Dal confronto della base ritrovata colla base di una sola oncia di Milano, oppure della quantità dell' ac-

qua, che manda nel tempo t la Mantovana con quella, che nello stesso tempo manda la Milanese, s'intenderà, quanto l'una sia maggiore dell' altra. Ciocchè ec.

PROBLEMA IV.

Dato il numero delle once d'acqua da estrarsi da un canale, ritrovare l'altezza, che questo deve avere dopo l'estrazione dell'acqua nell' ipotesi, che questa si mova in virtù della pressione delle sue parti superiori.

184. Si cerchi sul principio l'altezza, e la larghezza di una sezione del canale. Indi considerata questa sezione come un foro rettangolare, e verticale, che abbia il suo lato superiore nella superficie dell'acqua, si cerchi la quantità dell' acqua Q, che in un dato tempo t vi passa, facendo, giacchè qui si suppone, che l'acqua venga mossa dalla pressione delle sue parti superiori, siccome succede nei canali d'insensibile pendenza (137.), facendo, dico, uso dell' equazione $Q = \frac{2}{3} bt A \sqrt{A \cdot 2g}$, dove b esprime la larghezza, A l'altezza della sezione (164.). Qui io trascuro la contrazione della vena, essendo cosa manifesta, ch'essa in questo caso o non ha luogo, o se lo ha, dev'esser insensibile, attesa la grandezza della bocca. Si cerchi finalmente

la quantità dell'acqua q, che nel tempo t manda una bocca del dato numero di once d'acqua sotto l'altezza di 4, e il battente di 2 once del braccio di Milano (179, 180.).

Ben si vede, che dopo l'estrazione della quantità q di acqua dal canale, l'altezza primiera di questo deve farsi minore, conservandosi però la stessa larghezza di prima. Si ponga dunque A l'altezza dell'acqua nel canale avanti, e x quella della stessa dopo l'estrazione della quantità dell'acqua q. Sarà la quantità dell'acqua, che dopo l'estrazione passa nel tempo t per l'altezza x, e per la primiera larghezza del canale, $= Q - q$. Ora si dimostrerà a suo luogo (369.), che, quando l'acqua in un canale si move soltanto in virtù della pressione delle sue parti superiori, allora sta $A : x = \sqrt[3]{Q^2} : \sqrt[3]{(Q-q)^2}$. Perciò $x = \frac{A\sqrt[3]{(Q-q)^2}}{\sqrt[3]{Q^2}}$. Ciocchè ec.

Esempio. Il Naviglio grande di Milano al ponte di Castano è largo 420, ed alto 30 once Milanesi. Si dimanda l'altezza, ch'esso ivi avrebbe, se gli si cavassero 540 once di acqua? Si troverà $x = 30. \frac{\sqrt[3]{(907200 - 18560)^2}}{\sqrt[3]{907200^2}} = 29$ in circa once del braccio di Milano, dove 907200 è la quantità dell'acqua, che in quel luogo por-

ta in un secondo il Naviglio, 18560 è quella, che nello stesso tempo somministra una bocca di 40 once di acqua. Le quantità poi dell'acqua sono determinate in once cubiche del suddetto braccio. Il Problema è di somma importanza, allorchè si tratta di derivare da un canale navigabile, e non molto voluminoso una data quantità di acqua, affine d'irrigare le campagne, facendoci esso conoscere avanti l'impresa, se quel fiume possa o no perder la sua qualità di navigabile.

CAPO VII.

Della misura dell'acqua, che sorte nello stesso tempo da un vase per più fori, della distribuzione, e misura della stessa cogli altri liquori.

185. ABbiamo fin qui ridotto a calcolo la quantità dell'acqua fluente, allorchè il foro, per cui si fa lo scolo, è unico. Ma ben si vede, che nello stesso modo si deve fare il calcolo anche, quando l'acqua esce nello stesso tempo per più fori, purchè ciascun di questi sia piccolo rispetto all'ampiezza del vase, essendo eziandio in questo caso la velocità del fluido al sortire da ciascun foro eguale a quella, che acquisterebbe un grave, cadendo liberamente per uno spazio

eguale alla distanza del foro dalla superficie del fluido contenuto. La esperienza solamente ci avverte, che, quando un foro trovasi vicino ad un altro più grande, la quantità d'acqua, che quello somministra in un dato tempo, è minore del giusto. Nè v'ha maraviglia: l'acqua, che dovrebbe sortire per il piccol foro, portasi verso il più grande, dove trova minor resistenza alla sua pressione, attesa la maggior quantità di fluido, che questo dispensa. Qui merita d'essere sciolto il Problema seguente.

PROBLEMA I.

Si supponga, che l'acqua, che si contiene (fig. 17.) *nel vase* ADCB *attraversato dal diaframma* ER, *resti sempre continua, durante il suo scolo sì per il foro* f *scolpito nel mezzo del diafragma* ER, *come anche per il foro* F *scolpito nel mezzo del fondo. Si dimanda, dati i fori* f, F, *e l'altezza costante* AD *dell'acqua nel vase* ADCB,

I. *L'altezza, che conviene alla velocità dell'acqua fluente sì per il foro* f, *come anche per il foro* F.

II. *La quantità dell'acqua, che in un dato tempo passa sì per il foro* f, *come anche per il foro* F.

186. EGli è chiaro, che lo scolo dell'acqua, che passa per il foro *f*, essendo impedito dalla

resistenza dell'acqua sottoposta, deve l'acqua sortire dal foro f nello stesso modo, con cui sortirebbe dall'egual foro R, se qui comunicasse con l'acqua GRmH di un vase laterale, l'altezza RG della quale rappresentasse la resistenza, che ciascun punto dell'acqua soffre dalla parte della sottoposta. In quest'ipotesi la velocità dell'acqua in f conviene soltanto alla differenza delle altezze RB, RG, ossia all'altezza GB. Inoltre, poichè la reazione è sempre uguale, e contraria all'azione, ciascun vede, che l'acqua sottoposta EDCR deve in tutti i suoi punti esser compressa dall'acqua superiore con forza eguale all'altezza GR, e quindi l'altezza, che conviene alla velocità dell'acqua fluente dal foro F, è soltanto GC. Però, chiamato t il tempo, in cui dura lo scolo sì per il foro F, come anche per il foro f, Q' la quantità attuale dell'acqua fluente dal foro F, q' quella dell'acqua fluente dal foro f, a l'altezza data AD dell'acqua nel vase ADCB, x l'altezza BG, che conviene alla velocità dell'acqua fluente dal foro f, y l'altezza GC, che conviene a quella dell'acqua fluente dal foro F, si avrà $Q' = \frac{5}{8} Ft\sqrt{y \cdot 2g}$, $q' = \frac{5}{8} ft\sqrt{x \cdot 2g}$ (100.), e $a = y + x$. Ma poichè l'acqua nell'interiore del vase forma, siccome si suppone, sempre una massa continua, deve nel tempo t passare per il foro f tant'acqua, quanta ne passa per l'altro F, essendo egli chiaro, che, se per il foro F passasse più acqua, che per l'altro f

durante il tempo t, la superficie superiore dell' acqua sottoposta EDCR non potrebbe restare continuamente applicata al diafragma ER, ma tra questo, e quella vi sarebbe necessariamente uno spazio voto d'acqua. Quindi è, che, dovendo $Q' = q'$, deve anch' essere $\frac{2}{3} F t \sqrt{y \cdot 2g} = \frac{2}{3} f t \sqrt{x \cdot 2g}$, ossia $F\sqrt{y} = f\sqrt{x}$. Si vede adunque,

I. Che dev'esser l'altezza, che conviene alla velocità dell'acqua fluente dal foro f, ossia $x = \frac{F^2 a}{F^2 + f^2}$. Imperocchè, essendo $F\sqrt{y} = f\sqrt{x}$, ossia $F^2 y = f^2 x$, dev' esser $y = \frac{f^2 x}{F^2}$, e $x = \frac{F^2 y}{f^2}$. Onde, messo nell'equazione di sopra $a = y + x$ al luogo di y il suo valore, si avrà $a = \frac{f^2 x}{F^2} + x$, e quindi, fatta la riduzione, $x = \frac{F^2 a}{F^2 + f^2}$. Per la stessa ragione anche l'altezza, che conviene alla velocità dell' acqua fluente dal foro F, dev' essere, ossia $y = \frac{f^2 a}{f^2 + F^2}$.

II. Che, messo nell' equazione $q' = \frac{2}{3} f t \sqrt{x \cdot 2g}$ il valore di x, dev' esser la quantità dell'acqua, che nel dato tempo passa per il foro f, ossia $q' = \frac{2}{3} F f t \sqrt{\left(\frac{a \cdot 2g}{F^2 + f^2}\right)}$. Questa equa-

N 4

zione dà anche la misura della quantità dell'acqua, che nello stesso tempo sorte dall'altro foro F, essendo, siccome abbiamo già detto, $Q' = q'$. Ciocchè ec.

187. *Coroll.* Poichè l'altezza y, che conviene alla velocità dell'acqua fluente dal foro F, è minore dell' altezza a dell' acqua nel vase ADCB, ne siegue, che la vena fluida perde parte della sua velocità, ogni qual volta nel condotto, per cui essa si muove, succede qualche sorte contrazione, ossia, siccome si suole chiamare, *strozzatura*.

PROBLEMA II.

Distribuire la quantità dell' acqua, che riceve in un dato tempo un serbatojo in un numero dato di parti secondo la data proporzione nell' ipotesi, che il serbatojo venga costantemente nella stessa maniera nodrito dalle acque di un condotto nel tempo dello scolo.

188. Bisogna sul principio ricercare la quantità dell' acqua, che in un minuto riceve il serbatojo dal condotto. Affine di ritrovarla si deve fare in uno de' suoi lati un foro di conveniente grandezza, e lasciar sortire da questo l'acqua, finchè la superficie dell'acqua nel serbatojo, cessato ogni movimento d'oscillazione, dimori quie-

tà nello stesso luogo senza punto ascendere, o discendere. Egli è chiaro, che il foro in questo caso somministrerà tant' acqua, quanta ne riceve il serbatojo dal condotto. Onde se si riceverà dentro di un vase l' acqua, che somministra in un minuto il foro del serbatojo; mentre la superficie dell' acqua dimora quieta nello stesso luogo, e se poscia si prenderà di quest' acqua una giusta misura, avrassi ritrovata la quantità dell' acqua, che riceve in un minuto il serbatojo, e si potrà valutarla in pollici cubici.

Si ponga Q' la quantità attuale dell' acqua, che in un minuto riceve, e che perciò può nello stesso tempo somministrare il serbatojo, conservandovisi sempre la superficie dell' acqua alla stess' altezza, e sia essa da distribuirsi nelle parti A, B, C, cosicchè la prima sia n volte, la seconda m volte maggiore della terza. Egli è chiaro, che, chiamata x la quantità dell' acqua, che deve avere la minima parte C in un minuto, dev' esser la quantità dell' acqua, che nello stesso tempo toccherà alla parte B, $= mx$, e quella, che all' altra parte A, $= nx$. Quindi, dovendo essere $x + mx + nx = Q'$, si troverà x, ossia

la minima parte C di acqua $= \frac{Q'}{1+n+m}$, e

però la parte B di acqua $= \frac{mQ'}{1+n+m}$, e

in fine la parte A di acqua $= \frac{nQ'}{1+n+m}$.

Ora si stabilisca la distanza, che si vuol dare al centro di ciascun foro di distribuzione dal livello dell'acqua nel serbatojo, e sia essa a, b, c per le respettive parti A, B, C. Si troverà, chiamate F, F', f le aree da darsi ai fori di distribuzione, affinchè sotto le suddette profondità possano in un minuto somministrare le parti A, B, C di acqua, si troverà, dico, $F = \frac{8nQ'}{(1+n+m).5t\sqrt{a.2g}}$, $F' = \frac{8mQ'}{(1+n+m).5t\sqrt{b.2g}}$, $f = \frac{8Q'}{(1+n+m).5t\sqrt{c.2g}}$ (100), dove $t = 60$ secondi. Trovata l'area di ciascun foro, si troverà facilmente il diametro (101.), se piacerà di dare ad essi la figura circolare. Ciocchè ec.

189. *Scolio*. Quando la superficie dell'acqua contenuta resta immobilmente sempre nello stesso luogo, i centri dei fori si possono disporre a piacere o nella stessa, oppure in diversa distanza da quella. Ma se si abbassa, o s'innalza, siccome succede, allorchè in tempo di siccità, o di pioggia si scema, o s'accresce l'acqua, che nodrisce il serbatojo, la loro situazione non può essere arbitraria, se si vuole, che i fori somministrino l'acqua sempre nella stessa ragione. Infatti sianvi due fori F, f disugualmente distanti dal

livello dell'acqua nel serbatojo, e sìano le quantità dell'acqua Q', q', ch'essi mandano nello stesso tempo t, nella ragione di $b:c$. Si troverà $Q' = \frac{5}{8} F t \sqrt{A.2g}$, $q' = \frac{5}{8} f t \sqrt{a.2g}$ (100.), dove le lettere A, a esprimono le altezze medie. Si supponga ora, che mediante la maggior quantità d'acqua, che porta al serbatojo il condotto, l'altezza dell'acqua nel serbatojo diventi maggiore della primitiva della quantità m, e sia quest'incremento m costante nel tempo t. Sarà in questo secondo caso la quantità Q' d'acqua, che manderà nel tempo t il foro F di distribuzione, $Q' = \frac{5}{8} F t \sqrt{A + m.2g}$, il foro f, $q' = \frac{5}{8} f t \sqrt{a + m.2g}$. Egli è chiaro, che in questo secondo caso le quantità delle acque fluenti dai fori F, f non possono essere nella ragione di $b:c$. Imperocchè se fossero esse in questa ragione, poichè nella stessa sono anche, siccome si suppone, le quantità delle acque somministrate nello stesso tempo dagli stessi fori avanti l'incremento dell'altezza dell'acqua nel serbatojo, si avrebbe $\frac{5}{8} F t \sqrt{A.2g} : \frac{5}{8} f t \sqrt{a.2g} = \frac{5}{8}$ $F t \sqrt{A + m.2g} : \frac{5}{8} f t \sqrt{a + m.2g}$, ossia $\sqrt{A.2g} :$ $\sqrt{a.2g} = \sqrt{A + m.2g} : \sqrt{a + m.2g}$, ossia, alzando ciascun termine al quadrato, $A.2g : a.2g$ $= A + m.2g : a + m.2g$, ossia finalmente $A : a$ $= A + m : a + m$. Quindi, fatti i prodotti

dei termini medj, ed estremi, si avrebbe $A.\overline{a+m} = a.\overline{A+m}$; e perciò anche $A = a$; il che è contra l'ipotesi, essendo i fori F, f, siccome abbiamo supposto, disugualmente distanti dalla superficie dell'acqua nel serbatojo. Lo stesso devesi dire anche, quando si scema l'altezza dell' acqua nel serbatojo, dovendo stare fatto il raziocinio di sopra $\frac{5}{8} Ft\sqrt{A.2g} : \frac{5}{8} ft\sqrt{a.2g} = \frac{5}{8} Ft\sqrt{\overline{A-m}.2g} : \frac{5}{8} ft\sqrt{\overline{a-m}.2g}$; dal che si ricava $A = a$; il che parimente è contra l'ipotesi. In quest' ultimo caso può succedere ancora, che il foro superiore non mandi più acqua, mentre l'inferiore continua a mandarla. Qual adunque dev' esser la figura, e disposizione dei fori di distribuzione? Eccovela.

PROBLEMA III.

Determinare la figura, e la disposizione da darsi ai fori di distribuzione, affinchè questi somministrino sempre l'acqua nella stessa ragione, ancorchè s'innalzi, o s'abbassi la superficie dell'acqua nel serbatojo.

190. Si ponga Q' la quantità dell'acqua, che in un minuto somministra il foro A di distribuzione, q' la quantità dell'acqua, che nello stesso tempo somministra l'altro foro B, e sia la ragio-

ne, che passa tra l'una, e l'altra, di $m:n$. Si prenda a piacere la distanza PH dalla superficie (fig. 4.) dell'acqua nel serbatojo, e si tiri l'orizzontale Pb indefinita. Su di una parte di questa come su di una base si apra un foro rettangolare, e verticale dell'altezza PS, il quale sotto la profondità PH, somministri in un minuto la quantità di acqua Q': sarà la larghezza di quel foro, ossia $PM = \frac{8\,Q'}{PS.\ 5\,t\sqrt{PH.\ 2g}}$ (100.). Si prenda un'altra parte della stessa orizzontale, e vi si faccia un altro foro rettangolare, e verticale della stess'altezza PS, il quale mandi in un minuto sotto la medesima profondità la quantità di acqua q': sarà la larghezza di quest'altro foro, ossia $Mp = \frac{8\,Q'}{PS.\ 5\,t\sqrt{PH.\ 2g}}$.

Si paragonino ora fra loro le quantità di acqua Q', q'. Essendo $Q' = PM.\ PS.\ \frac{5}{8}\,t\sqrt{PH.\ 2g}$, e $q' = Mp.\ PS.\ \frac{5}{8}\,t\sqrt{PH.\ 2g}$, si vedrà, fattone il lor paragone, che stà $Q' : q' = PM : Mp$, vale a dire in ragione delle basi dei fori. Perciò, poichè $Q' : q' = m : n$, deve anche $PM : Mp = m : n$. Ciascun vede, che, qualunque sia la mutazione del livello dell'acqua nel serbatojo, non può mutarsi la suddetta ragione delle quantità delle acque fluenti. Imperocchè comunque cresca, o si diminuisca l'acqua

nel serbatojo, in ambedue i fori verticali, e rettangolari son sempre uguali sì le profondità PH, e le altezze PS per la loro disposizione, e natura; e perciò le quantità dell'acqua, ch'essi mandano nello stesso tempo, debbon sempre essere in ragione di PM: M*p*, ossia di *m*: *n*.

Quindi si vede, che, se nella distribuzione delle acque in vece dei fori circolari si adoprano i rettangolari posti verticalmente, se a tutti questi si dà la stess' altezza, se finalmente le loro basi si situan tutte nella stessa orizzontale, comunque s'abbassi, o s'innalzi la superficie dell'acqua nella conserva, le quantità delle acque, ch'essi nello stesso tempo mandano, debbon sempre restare fra loro nella stessa ragione. Ciocchè ec.

191. *Scolio*. Il Sig. Mariotte già da molto tempo suggerì agl'Idraulici di adoperare nella distribuzione delle acque in vece di circolari i fori rettangolari. Ma il suo suggerimento non è mai stato messo in pratica, essendo le aperture rettangolari difficili a farsi con esattezza, sottoposte ad un grande attrito, principalmente se son piccole, e facili finalmente a restar chiuse dal fango dell'acqua, il quale si attacca ai loro angoli. Pensa però il Sig. Ab. Bossut, che si abbiano da conservare in pratica i fori circolari, la costruzione de' quali è facile, e comodo l'uso: che i loro centri si abbiano da situare nella stessa orizzontale: che finalmente in vece delle grandi si abbian da fare molte piccole aperture, che

prese assieme somministrano la stessa quantità di acqua, e la trasmettano ad uno stesso condotto. Dando in questo modo a tutte le aperture quasi la stessa grandezza, si conserverà sempre fra le quantità dell' acqua, che si dispensano, appresso a poco la stessa ragione. La dottrina fin qui spiegata della distribuzione delle acque è di somma importanza nella umana Società principalmente, allorchè si tratta di dividere tra varie fontane pubbliche, o private le acque condotte, e radunate nelle conserve, da dove col mezzo di differenti tubi passano al lor destino.

PROBLEMA IV.

Dati i volumi dell' acqua, e del vino, che si mischiano assieme, e dato il prezzo di una misura sì dell' uno, come dell' altro liquore, ritrovare il prezzo del misto alla stessa misura.

192. I Volumi dell'acqua, e del vino si dicano a, b. Non ammettendo l'acqua dentro i suoi pori le particelle del vino, dev' essere il volume del misto $= a + b$. Si ponga m il prezzo di una misura, per esempio, di una brenta di acqua, e n quello di un' altra di vino. Sarà il prezzo del volume a di acqua $= am$, stando $1 : m = a : x$. Per la stessa ragione sarà il prezzo del vo-

lume b del vino $= bn$. Ora il prezzo del volume del misto dev' esser $= am + bn$. Quindi, poichè l' intero volume del misto stà al volume di una brenta, come l' intero di lui prezzo stà al prezzo di una brenta, se si farà $a + b : 1 = am + bn : x$, si troverà il prezzo x, con cui si deve vendere il misto alla brenta, $= \frac{am + bn}{a + b}$.
Quest' equazione serve anche, quando in vece dell'acqua vi s'infonde del vino di diverso prezzo, esprimendo colla lettera a il volume, e coll' altra m il prezzo di una misura di questo secondo vino. Se l'acqua, che si mischia col vino, è di nissun prezzo, poichè allora il prezzo am dell' acqua infusa nel vino $= 0$, il prezzo del misto alla brenta diventa $= \frac{bn}{a + b}$. Ciocchè ec.

PROBLEMA V.

Dato il volume del vino, e il prezzo di una misura sì di questo, come di acqua, ritrovare il volume di acqua da mischiarsi con quel di vino per rendere il misto sotto la stessa misura ad un dato prezzo.

193. Si ponga a il prezzo di una brenta di acqua, b il prezzo di una di vino, m quello di una

una di misto. Egli è chiaro, che, chiamati v il volume dato del vino, e x il volume dell'acqua da infondervi, dev' esser il volume del misto $= v + x$, e il di lui prezzo $= ax + bv$. Ora si faccia la proporzione, che siegue: l'intero volume del misto stà al volume di una brenta, come l'intiero di lui prezzo al prezzo di una brenta, ossia $v + x : 1 = ax + bv : m$. Si avrà, fatti i prodotti degli estremi, e dei medj termini della proporzione fra loro, $mv + mx = ax + bv$. Onde, poichè il prezzo del vino è maggiore di quello dell'acqua, dev' essere il ricercato volume dell' acqua da mischiarsi con quel del vino, ossia $x = v . \frac{(b - m)}{m - a}$. Anche qui la stessa equazione serve per ritrovare il volume del vino men buono da infondersi nel buono per poter vendere il misto sotto una data misura ad un dato prezzo, purchè a dinoti il prezzo di una misura di quel vino. Se il vino, che s' infonde in vece dell'acqua, è più prezioso dell' altro, in questo caso, siccome ognun vede, dev' esser $x = v . \frac{(m - b)}{a - m}$. Finalmente se l'acqua infusa è di nissun prezzo, allora $x = v . \frac{(b - m)}{m}$, diventando $a = 0$. Ciocchè ec.

PROBLEMA VI.

Dato il volume di una botte, e dati i prezzi di una misura sì di vino, come di acqua, ritrovare, quanto di ciascun di questi due liquori si ha da prender per riempiere in modo la botte, che si possa vendere il misto ad un dato prezzo sotto la data misura.

194. Si ponga a il prezzo di una brenta di acqua, b il prezzo di una di vino, e m il prezzo di una del misto. Essendo il volume del misto eguale al volume della botte, siccome si suppone, chiamati i volumi della botte, dell'acqua, e del vino da prendersi v, x, y, si avrà l'equazione $v = x + y$. Quindi, poichè il prezzo del misto dev'essere eguale alla somma dei prezzi dell'acqua, e del vino, che si prendono, affine di riempiere la botte, si avrà anche quest'altra equazione $mv = ax + by$. Ora si cerchi nella prima il valore di y: si troverà $y = v - x$. Si metta poscia questo valore nella seconda equazione al luogo di y: si avrà $mv = ax + bv - bx$. Adunque si troverà il numero delle brente di acqua da prendersi, ossia $x = \frac{bv - mv}{b - a}$, e del vino $y = v - \frac{bv + mv}{b - a}$. Anche qui le stesse equazioni han luogo, quando in vece dell'acqua

si ha da prendere del vino più debole. Se si volesse prendere del più prezioso, allora dovrebb' essere $x = \frac{mv - bv}{a - b}$, e $y = v - \frac{mv + bv}{a - b}$. Finalmente se l'acqua, che si prende, è di nissun prezzo, in questo caso $x = \frac{bv - mv}{b}$, e $y = v - \frac{bv + mv}{b}$, essendo $a = 0$. Ciocchè ec.

Esempio. Si ha una botte di 100 brente, e si vuol riempiere di due liquori di diverso prezzo di acqua cioè di $\frac{1}{4}$ di una lira, e di vino di 25 lire alla brenta per vendere il misto 20 lire alla stessa misura. Si troverà il numero delle brente di acqua da prendersi, ossia $x = \frac{bv - mv}{b - a}$ $= \frac{2500 - 2000}{25 - \frac{1}{4}} = 20 + \frac{20}{99}$; e il numero delle brente di vino, ovvero $y = v - \frac{bv + mv}{b - a}$ $= 100 - \frac{2500 + 2000}{25 - \frac{1}{4}} = 79 + \frac{79}{99}$.

CAPO VIII.

Della misura dell' acqua, che mandano i vasi, mentre si votano per un piccol foro scolpito nel fondo, oppure in uno dei loro lati, e del tempo, che impiegano nelle loro evacuazioni.

195. L' Esperienza c' insegna, che, quando un vase pieno di acqua si vota per un piccol foro scolpito nel fondo, la superficie dell'acqua nel suo abbassamento si conserva allora sensibilmente orizzontale fino alla distanza di 3 o 4 pollici dal fondo ordinariamente. A questa distanza incomincia a formarsi sulla superficie discendente dell' acqua una specie d' imbuto, la di cui punta corrisponde al centro del foro. A misura, che quest' imbuto s' ingrandisce, l' aria dell' atmosfera vi s' introduce, e occupa il luogo dell' acqua. La superficie non è ancora giunta alla distanza di due linee dal fondo, che l'acqua non sorte più dal foro, che a goccia a goccia. Ond' è, che nei vasi, che si votano per un piccol foro, lo scolo dell' acqua non resta libero, se non fino al momento, in cui comincia a rendersi sensibile l' imbuto, oltre il qual momento esso è impedito a differenza dei vasi mantenuti costantemente pieni, dove lo scolo, se si prescinde della contrazione della vena, è sempre

libero. Ond' è anche, che in essi non si può determinare il tempo della discesa della superficie del fluido, se non fino a quel momento. Allorchè il vase si vota per un piccol foro scolpito in uno dei suoi lati, non vi si forma, che una specie di un mezzo imbuto, e pare, che questo non incominci a farsi sensibile, se non quando la superficie stà per toccare l' orlo superiore del foro. Tutto ciò ha luogo soltanto, quando il foro, per cui si vota il vase, è assai picciolo rispetto alla larghezza del vase. Imperocchè s' è grande, appare subito nella superficie lo scavamento, ed è questo tanto più considerabile, quanto maggiore si è la grandezza di quello. Inoltre nei vasi mantenuti costantemente pieni alla stess' altezza, la quantità dell' acqua, che nello stesso tempo sorte dallo stesso foro, è sempre la stessa, qualunque sia la loro figura, e capacità, non entrando nella sua misura, se non questi tre elementi, la grandezza cioè del foro, il tempo dello scolo, e l' altezza dell' acqua contenuta al di sopra del foro, siccome abbiam veduto. Ma la cosa non procede in sì fatto modo nei vasi, che si votano per un piccol foro, ossia questo scolpito nel fondo, ossia in uno dei loro lati. In questo caso la quantità dell' acqua fluente dipende non solamente dalla grandezza del foro, ma eziandio dalla figura, e capacità del vase, combinate col tempo, e coll' altezza dell' acqua contenuta. Però i fenomeni

degli scoli son varj, ficcome varie sono le specie dei vafi, che fi votano.

196. Noi acquiftiamo l'idea del tempo, facendo rifleffione sulla continua fucceffione delle noftre idee. Quando riflettiamo all'ordine, con cui fi succedono nella noftra mente le idee A, B, C, D, E ec., conosciamo allora, che A è la prima idea, B la seconda, C la terza ec., e che tra la prima A, e l'ultima E avvi un intervallo; la misura del quale sono le idee intermedie B, C, D. Da ciò ci accorgiamo di efiftere continuatamente, e fucceffivamente, e vedendo, che infieme con noi efiftono anche altre cose, ne conchiudiamo, che anche quefte efiftono continuatamente, e fucceffivamente. Ora la continuazione fucceffiva della noftra efiftenza, e quella delle altre cose create chiamafi *durazione*, o *tempo*. Le noftre idee non ci poffono dare un' esatta misura del tempo, o fi confideri la difficoltà di ritenere a memoria le idee intermedie, o la diversa velocità, con cui le une succedono alle altre, o lo ftato finalmente del sonno, in cui o non abbiamo idee, o se ne abbiamo, non ne conserviamo quafi mai la memoria. Perciò gli uomini sono ftati coftretti a ricercare fuori della loro mente la misura del tempo, e hanno inventate a quefto fine varie macchine. Tra quefte celebre fi è la *clepfidra* appreffo gli Antichi.

197. Clepfidra è un vase di vetro, che

mediante lo scolo dell' acqua contenuta misura il tempo. Ond' è, ch' essa si chiama anche *orologio ad acqua*. Alcune volte in vece dell' acqua si è adoperato il mercurio. Le clepsidre sono state, siccome si crede, inventate nell' Egitto al tempo dei Tolomei, giacchè si sa, che gli Egiziani si servivano di esse principalmente in tempo d' Inverno, mentre di Estate si valevano degli orologi a Sole. Nei tempi antichi si è fatto grandissimo uso delle stesse per la misura del tempo, massimamente nelle arringhe degli Oratori, dove il tempo era prescritto. Quindi son nate quelle espressioni sì famigliari appresso gli Scrittori Latini: *mihi haeret aqua*, *aquam perdere &c.* Memorabile si è l' uso, che ne ha fatto Giulio Cesare al suo arrivo in Inghilterra, dove col mezzo delle clepsidre ritrovò, che ivi le notti in tempo di Estate erano più corte, che nel continente. Nei tempi moderni si servì delle clepsidre Ticone Brahe nella misura del moto delle stelle, e Dudley nelle sue osservazioni maritime. Merita qui d' esser letto lo Scolio istorico del ch. P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie sull' origine, e sugli usi delle clepsidre ne' suoi pregiatissimi Supplementi all' Idrodinamica del Sig. Ab. Bossut. La dottrina, che sono per esporre, ha luogo anche, quando lo scolo si fa per un foro laterale, purchè per altezza si prenda la distanza del centro del foro dalla superficie del fluido contenuto; il che si può fare ordinariamente nella pratica senza pericolo di errore notabile.

PROBLEMA I.

Dato un vase, qualunque esso siasi, che si vota per un piccol foro F, *ritrovare il tempo, che la superficie* AC *impiegherà a discendere dall'altezza data* Bp *per arrivare alla posizione* hh (fig. 18.).

198. DAl centro F del foro si alzi la perpendicolare FB alla superficie AC del fluido nel vase AFC, e divisa FB in un numero infinito di parti infinitesime, ed eguali B*b*, *bd*, *de* ec. si conducano per li punti *b*, *d*, e i piani MM, *mm*, *rr* paralleli alla superficie orizzontale AC. Egli è chiaro,

I. Che nel tempo infinitesimo, che mette la superficie AC nella sua discesa dall' altezza B*b* in MM, deve dal foro F sortire una quantità d'acqua eguale al solido AMMC, che può esser considerato come un prisma, che abbia per base la superficie AC, e per altezza B*b*, ossia la di cui solidità sia $=$ AC. B*b*.

II. Che in tutto questo tempo infinitesimo l' altezza verticale BF del fluido nel vase al di sopra del foro si può riguardare come costantemente la stessa, non essendosi essa scemata in tutto quel tempo, se non della quantità infinitesima B*b*, ch'è nulla in confronto della quantità finita BF.

III. Che, quindi il tempo infinitefimo, che mette la superficie AC nel suo abbaffamento in MM, dev' effer $= \frac{8\,Q'}{5\,F\sqrt{a.2g}}$ (100.); e perciò, fatta la foftituzione, $= \frac{8\,AC.Bb}{5\,F\sqrt{BF.2g}}$.

Ora da un punto E dell' orizzontale FG tirata indefinitamente dal centro F del foro fi alzi la perpendicolare ED eguale all' altezza BF del fluido contenuto, e preso un parametro $= 2g$ (40.) fi descriva intorno di ED, come intorno di un affe la parabola EzT, che abbia il vertice in E. Egli è chiaro, che, prolungate le rette AC, MM, rr, hh fino alla parabola, le ordinate di quefta DT, Ns, Oz, Qx, Py esprimeranno le velocità affolute dell' acqua fluente dal foro F sotto le profondità BF, bF, dF, eF ec., offia DE, NE, OE, QE ec. Indi fi costruisca una curva RoyG, in cui le ordinate DR, Nn, Oo, Qq fieno eguali ai quoti, che ne risultano, dividendo le superficie, offia sezioni AC, MM, mm, rr per le ordinate corrispondenti DT, Ns, Oz, Qx della parabola. Si vede,

I. Ch' effendo $DR = \frac{AC}{DT}$ per costruzione, dev' effer $AC = DR.DT$.

II. Ch' effendo $DT^2 = DE.2g$ per la na-

tura della parabola, ossia $= BF . 2g$, dev'esser anche $\sqrt{BF} = \frac{DT}{\sqrt{2g}}$.

Messi adunque questi valori nell'equazione di sopra al luogo delle quantità AC, BF, si troverà il tempo infinitesimo, che mette la superficie AC nella sua discesa dall'altezza Bb, $= \frac{8 . DR . DT . Bb . \sqrt{2g}}{5 F . DT . \sqrt{2g}} = \frac{8}{5} . \frac{DR . Bb}{F} = \frac{8}{5} . \frac{DR . DN}{F}$. Nello stesso modo procedendo si troverà il tempo infinitesimo, impiegato dalla superficie MM nella sua discesa dall'altezza bd, $= \frac{8}{5} . \frac{Nn . NO}{F}$, impiegato dalla superficie mm nella sua discesa dall'altezza de, $= \frac{8}{5} . \frac{Oo . OQ}{F}$, e così di seguito. Perciò la somma di tutti questi tempi infinitesimi, ossia il tempo finito, che mette la superficie AC nella sua discesa dall'altezza finita Bp, dev'esser, chiamato t questo tempo, deve, dico, essere $t = \frac{8}{5} . \frac{DPyR}{F}$, essendo la somma delle aree infinitesime DR . DN, Nn . NO, Oo . OQ ec. eguale all'area DPyR. Quindi, trovata la quadratura dell'area DPyR (il che non si ottiene ordinariamente se non col mezzo del calcolo integrale), si avrà la misura

del tempo t, essendo nota, siccome si suppone, l'area F del foro del dato vase. Ciocchè ec.

199. *Coroll.* I. Si suppongano le altezze Bb, Bd finite: sarà il tempo, che mette la superficie AC nella sua discesa dall'altezza Bb, al tempo, che mette la stessa nella sua discesa dall' altezza Bd $= \frac{2}{5} \cdot \frac{DNnR}{F} : \frac{2}{5} \cdot \frac{DOoR}{F} =$ DNnR : DOoR, vale a dire saranno i tempi impiegati dalla superficie AC a percorrere le altezze Bb, Bd proporzionali alle aree corrispondenti. Quindi si avrà una clepsidra, se si darà al vase AFC una figura tale, che le aree DNnR, DOoR, DQqR, DPyR crescano uniformemente come i tempi, cioè che sieno fra loro come i numeri naturali 1, 2, 3, 4 ec. In questo caso se la superficie AC mette per esempio un' ora nella sua discesa dall' altezza Bb, deve mettere due, tre ec. ore nella sua discesa dalle altezze Bd, Be ec., ossia un' ora nella sua discesa da ciascuna parte Bb, bd, de ec.

200. *Coroll.* II. Poichè il vase AFC è dato, ognun vede, che conoscendo l' altezza Bp percorsa dalla superficie AC nella sua discesa, si potrà anche ritrovare lo spazio AhhC, che l'acqua vi occupava. Quindi, poichè si sa il tempo, che la superficie AC impiega nella sua discesa dall'altezza Bp, si può anche sapere la quantità dell'acqua, che in questo tempo sorte per il foro F, mentre si vota il vase AFC.

PROBLEMA II.

Ritrovare la figura da darsi ad un vase, perchè possa, durante lo scolo per un piccol foro scolpito nel di lui fondo, la superficie dell' acqua contenuta discender sempre in tempi eguali per eguali spazj.

201. Si supponga il vase AFC generato dal rivolgimento della curva ArF intorno la retta BF, come intorno il suo asse, e si concepisca quest' asse diviso in un numero infinito di parti eguali Bb, bd, de ec. Sarà il tempo infinitesimo, che mette la superficie AC nella sua discesa dall'altezza Bb, $= \frac{8}{5} \cdot \frac{DR \cdot DN}{F}$, e il tempo infinitesimo, che metterà la stessa superficie, tostochè sarà giunta in MM, nella sua discesa dall' altezza bd, $= \frac{8}{5} \cdot \frac{Mn \cdot NO}{F}$ (198.). Ma poichè questi due tempi debbono essere, siccome si dimanda, eguali, bisogna, che sia $\frac{8}{5} \cdot \frac{DR \cdot DN}{F}$ $= \frac{8}{5} \cdot \frac{Nn \cdot NO}{F}$, e quindi $DR \cdot DN = Nn \cdot NO$, ossia $DR = Nn$, essendo DN, NO eguali per costruzione alle parti eguali dell' asse Bb, bd. Perciò le rette Rn, no debbono esser fra loro

poste direttamente. Nello stesso modo si dimostra, che anche le altre rette sono fra loro, e colle prime poste direttamente, cosicchè RG diventa una retta verticale in questo caso.

Ma non può essere $DR = Nn$, se non posto $\frac{AC}{DT} = \frac{MM}{Ns}$, ossia, poichè la superficie AC, MM sono cerchj, e quindi proporzionali ai quadrati dei loro raggi BC, bM, se non posto $\frac{BC^2}{DT} = \frac{bM^2}{Ns}$, ossia finalmente, poichè le ordinate DT, Ns della parabola cònica EzT sono proporzionali alle radici delle corrispondenti ascisse DE, NE, ovvero BF, bF, se non posto $\frac{BC^2}{\sqrt{BF}} = \frac{bM^2}{\sqrt{bF}}$; e quindi $BC^2 : bM^2 = \sqrt{BF} : \sqrt{bF}$.

Adunque, perchè durante lo scolo per il piccol foro F scolpito nel fondo della clepsidra la superficie AC dell'acqua contenuta possa discendere sempre per eguali spazj in tempi eguali, è necessario, che il vase sia generato dal rivolgimento di una curva di tal natura, che abbia i quadrati delle sue ordinate BC, bM, dm ec., ossia AB, Mb, md ec. proporzionali alle radici quadrate delle ascisse corrispondenti BF, bF, dF ec. Tale appunto si è la curva, che dai Geometri si chiama *parabola biquadrata*. Il vase adunque, che si cerca, dev' esser generato dalla

parabola biquadrata A B F intorno dell' asse B F. Ciocchè ec.

202. *Scolio*. In questa clepsidra, siccome anche in qualunque altra, non si può far uso, se non delle divisioni, che stanno al di sopra del piano, dove principia a rendersi sensibile la formazione dell'imbuto, coerentemente a ciò, che abbiam detto sul principio di questo Capo. Adunque, quando si vuol far uso di questa, oppure di qualunque altra clepsidra, non si deve aspettare, che la superficie discendente troppo s'accosti al fondo del vase.

203. *Coroll.* I. Poichè il tempo, che mette la superficie A C ad abbassarsi in hh dentro il vase A F C, qualunque questo sia, ossia poichè $t = \frac{8}{5} . \frac{DPyR}{F}$, se si supporrà il vase generato dal rivolgimento della parabola *biquadrata* A h F intorno all'asse B F, si troverà allora il suddetto tempo, ossia $t = \frac{8}{5} . \frac{DP . DR}{F}$, diventando in questo caso $DPyR = DP. DR$.

204. *Coroll.* II. La quantità dell'acqua, che sorte per il foro F di questo vase nel tempo, che la superficie A C discende in hh, è uguale al volume del tronco A hh C. Quindi se si cercherà col mezzo della Geometrìa la misura del volume, ossia della solidità di questo tronco, si avrà anche la quantità dell'acqua, che sorte per

quel foro nel suddetto tempo. Ora la solidità del tronco $AhhC$, chiamato C il cerchio superiore, c l'inferiore di questo, si è $= \frac{2}{3} C . BF - \frac{2}{3} c . pF$. Imperocchè, essendo i cerchj AC, MM, mm ec., che si possono considerare come gli elementi, dai quali è composto il tronco $AhhC$, proporzionali alle ordinate corrispondenti DT, Ns, Oz ec. della parabola conica EzT, siccome la somma di queste è $= DET - PEy = \frac{2}{3} DT . DE - \frac{2}{3} Py . PE$ (34.), così anche la somma di quelli, ossia la solidità del tronco $AhhC$ dev' esser $= \frac{2}{3} C . BF - \frac{2}{3} c . pF$.

PROBLEMA III.

Dato un vase prismatico, che si vuota per un piccol foro, ritrovare il tempo, che impiegherà la superficie AD (fig. 19.) *a discendere dall' altezza data* Hm *per arrivare alla posizione* EG.

205. DAl centro F del foro si alzi la perpendicolare FH alla superficie AD del fluido contenuto nel vase prismatico ABCD, e, divisa FH in un numero infinito di parti infinitesime, ed uguali, si conducano per li punti h, n ec. i piani MM, NN ec. paralleli alla superficie orizzontale AD. Egli è chiaro, che il tempo infinitesimo, che metterà la superficie AD nella

sua discesa dall'altezza Hh, sarà $= \frac{8\,AD.\,Hh}{5\,F\sqrt{HF.\,2g}}$ (198.), ossia, chiamato B la base BC del vase prismatico, $= \frac{8\,B.\,Hh}{5\,F\sqrt{HF.\,2g}}$, essendo in un vase prismatico AD $=$ B.

Si supponga ora un corpo non pesante spinto all' insù da una forza acceleratrice costante, che gl'imprima gli stessi gradi di velocità, che imprime la gravità ad un corpo, che cade liberamente, di maniera che il corpo ascendente percorra lo spazio FH secondo la stessa legge, e nello stesso tempo, che un grave discendendo lo percorrerebbe. Sarà la velocità di questo corpo giunto in $h =$ $\sqrt{hF.\,2g}$ (39.). Ma, poichè questa velocità non si varia da h in H, se non per una quantità infinitesima, si può in tutto il tempo infinitesimo, che mette il corpo ad ascendere da h in H, essa considerare come uniforme. Quindi è, che, essendo nel moto uniforme il tempo eguale allo spazio diviso per la velocità, dev' essere il suddetto tempo $= \frac{Hh}{\sqrt{hF.\,2g}}$.

Si paragoni quest' ultimo tempo infinitesimo col primo. Starà il tempo infinitesimo, che mette la superficie AD nella sua discesa dall' altezza Hh, al tempo infinitesimo, che mette il corpo ascendente a percorrere la stess' altezza, $=$

8 B.

$\frac{8B.Hh}{5F\sqrt{HF.2g}} : \frac{Hh}{\sqrt{hF.2g}} = 8B:5F$, essendo hF sensibilmente eguale ad HF. Questa ragione ha luogo anche in tutti gli altri tempi infinitesimi, che il corpo ascendente, e la superficie suprema dell'acqua impiegano nel percorrere spazj infinitesimi eguali, siccome facilmente si dimostra. Perciò la somma dei tempi infinitesimi, ossia il tempo totale, che mette il vase prismatico ABCD a votarsi intieramente, stà alla somma dei tempi elementari, ossia al tempo totale, che mette il corpo ascendente a percorrere l'altezza FH del vase ABCD, $= 8B:5F$. Si chiami A l'altezza FH: sarà il tempo, che mette il corpo ascendente a percorrere l'altezza del vase prismatico, $=\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$, essendo questo tempo $=\frac{v}{g}$ (39.), ossia, poichè $v=\sqrt{A.2g}$, $=\frac{\sqrt{A.2g}}{g}=\sqrt{\left(\frac{A.2g}{g^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$. Adunque, chiamato T il tempo, che mette il vase ABCD a votarsi intieramente, se si farà $T:\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)} = 8B:5F$, si avrà $T=\frac{8B}{5F}.\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$.

Quindi facilmente si ritrova il tempo t, che

deve mettere la superficie A D dell'acqua nel vase A B C D ad abbaſſarſi da A D in E G. Imperocchè il tempo, che impiegherebbe la superficie E G nel suo abbaſſamento ſino in B C, sarebbe $= \frac{8B}{5F} . \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$, dove a esprime l'altezza mF. Però levato queſto tempo dal tempo T, che metterebbe lo ſteſſo vase a votarſi intieramente, se foſſe pieno di acqua ſino in A D, ſi avrà il tempo, che impiega la superficie A D nel suo abbaſſamento in E G, oſſia ſi avrà

$$t = \frac{8B}{5F} . \sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)} - \frac{8B}{5F} . \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)} = \frac{8B}{5F} . \left(\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}\right).$$ Ciocchè ec.

206. *Coroll.* I. La quantità dell'acqua, che sorte per il foro F del dato vase prismatico A B C D nel dato tempo t, ſi ritrova in queſto modo. Poichè il vase A B C D è dato, ſiccome ſi suppone, sarà nota la base B, l'altezza A dell'acqua contenuta, e l'area finalmente F del foro. Meſſi adunque nell'equazione $t = \frac{8B}{5F} . \left(\sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}\right)$ ai luoghi delle quantità note t, B, F, A, g i valori corriſpondenti, ſi cerchi il valore dell'altezza a, oſſia Fm dell'acqua reſidua nel vase in fine del dato tempo t.

Egli è chiaro, che, sottrata quest' altezza dall' altezza A, ossia FH, si avrà l'altezza Hm dello spazio AEGD, che prima occupava l'acqua. Quindi, moltiplicando quest' altezza Hm nella base del vase, si avrà finalmente la quantità dell' acqua, che nel dato tempo t è sortita per il foro del dato vase prismatico. Nello stesso modo date quattro di queste cinque quantità B, F, t, A, a si può sempre ritrovare col mezzo della suddetta equazione la quinta.

207. *Coroll.* II. La quantità dell' acqua, che manda il vase prismatico ABCD nel tempo della sua totale evacuazione, se si prescinde dall' imbuto, è la metà di quello, che nello stesso tempo manderebbe lo stesso vase mantenuto costantemente pieno. Imperocchè il tempo, che mette il vase ABCD a votarsi intieramente di acqua, si è $= \frac{8B}{5F} \cdot \sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$ (205.). Ora la quantità dell' acqua, che dentro di questo tempo manderebbe lo stesso vase, se restasse costantemente pieno, sarebbe $= \frac{5}{8} F \sqrt{A \cdot 2g} \cdot \frac{8B}{5F} \cdot \sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$ $= B \cdot 2A$, siccom' è chiaro, mettendo nell' equazione $Q' = \frac{5}{8} F t \sqrt{A \cdot 2g}$ (100.) al luogo di t il suo valore $\frac{8B}{5F} \cdot \sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)}$. Ora questa quantità di acqua B. 2A è doppia di quella, che si

contiene nel vase prismatico ABCD, essendo quest'ultima $=$ B. A. Si vede adunque, che se si prescinde dall'imbuto, deve nel tempo della totale evacuazione la quantità dell'acqua espulsa dal vase ABCD per il foro F esser soltanto la metà di quella, che lo stesso vase per lo stesso foro manderebbe, se restasse costantemente pieno.

208. *Coroll.* III. Il tempo, che mette nel vase v la suprema superficie a discendere per l'altezza $A - a$, si dica t, quella, che impiega nel vase v' la suprema superficie del fluido contenuto a discender per l'altezza $A' - a'$, si dica t'. Egli è chiaro, che sarà $t = \frac{8\,B}{5\,F} . \left(\surd\left(\frac{2\,A}{g}\right) - \surd\left(\frac{2\,a}{g}\right)\right)$, e $t' = \frac{8\,B'}{5\,F'} . \left(\surd\left(\frac{2A'}{g}\right) - \surd\left(\frac{2a'}{g}\right)\right)$. Quindi si avrà $t : t' = \frac{8\,B}{5\,F} . \left(\surd\left(\frac{2\,A}{g}\right) - \surd\left(\frac{2a}{g}\right)\right) : \frac{8\,B'}{5\,F'} . \left(\surd\left(\frac{2\,A'}{g}\right) - \surd\left(\frac{2\,a'}{g}\right)\right) = \frac{B}{F} . (\surd A - \surd a) : \frac{B'}{F'} . (\surd A' - \surd a')$. I tempi adunque, che impiegano la superficie delle acque nelle loro discese dalle altezze $A - a$, $A' - a'$, sono fra loro, come i prodotti delle basi dei vasi moltiplicate nelle differenze delle radici quadrate delle altezze primiere, ed ultime delle acque nei vasi divisi per le aree dei fori.

209. *Scolio*. Se si prescinde dall'imbuto, si troverà, che i tempi, che mettono due vasi prismatici nelle loro totali evacuazioni, sono in ragione composta delle dirette delle basi dei vasi, e delle radici quadrate delle altezze delle acque contenute, e dall'inversa delle aree dei fori, essendo in questo caso $t, t' = \frac{8B}{5F} \cdot \sqrt{\left(\frac{2A}{g}\right)} : \frac{8B'}{5F'} \cdot \sqrt{\left(\frac{2A'}{g}\right)} = BF'\sqrt{A} : B'F\sqrt{A'}$. In questa ipotesi adunque due vasi prismatici si debbon votare nello stesso tempo: I. quando $BF'\sqrt{A} = B'F\sqrt{A'}$, non potendo essere $BF'\sqrt{A} = B'F\sqrt{A'}$, se non posto $t = t'$: II. quando $B : B' = F\sqrt{A'} : F'\sqrt{A}$: III. quando $F : F' = B\sqrt{A} : B'\sqrt{A'}$: IV. quando $\sqrt{A} : \sqrt{A'} = B'F : BF'$, essendo anche in questi tre ultimi casi, fatti i prodotti degli estremi, e dei medj termini fra loro, $BF'\sqrt{A} = B'F\sqrt{A'}$, e perciò anche $t = t'$.

PROBLEMA IV.

Dividere il vase prismatico ADEH (*fig.* 20.) *pieno di acqua con piani orizzontali in modo, che le parti dell'acqua comprese da questi piani s'abbiano da votare in tempi eguali per il foro* F.

210. DAl centro F del foro si alzi la perpendicolare FM alla superficie AH dell'acqua conte-

nuta nel vase prismatico ADEH, e prese le sue parti PF, OF, NF, MF in modo, che sieno fra loro come i quadrati dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 ec., ossia come 1, 4, 9, 16 ec., si conducano per li punti P, O, N i piani orizzontali RS, CQ, BG. Egli è chiaro, che il tempo, che metterà la superficie AH nel suo abbassamento da AH in BG sarà (205.) $\frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2MF}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2NF}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2.16}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2.9}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\left(4\sqrt{\left(\frac{2}{g}\right)} - 3\sqrt{\left(\frac{2}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\sqrt{\left(\frac{2}{g}\right)}$: che il tempo, che metterà la superficie BG ad abbassarsi in CQ, sarà $= \frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2NF}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2OF}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2.9}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2.4}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\sqrt{\left(\frac{2}{g}\right)}$: che il tempo, che metterà la superficie CQ ad abbassarsi in RS, sarà $= \frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2OF}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2PF}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\left(\sqrt{\left(\frac{2.4}{g}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2.1}{g}\right)}\right) = \frac{8B}{5F}.\sqrt{\left(\frac{2}{g}\right)}$: e così di seguito. Le superficie adunque AH, BG, CQ, RS impie-

gano lo stesso tempo nei loro respettivi abbassamenti da M in N, da N in O, da O in P, da P in F; e perciò in tempi eguali si votano le parti di acqua ABGH, BCQG, CRSQ, RDES per il foro F in modo però, che nel 1.° tempo deve dal foro sortire una quantità di acqua eguale alla parte ABGH, nel 2.° un' altra eguale alla parte BCQG, e così di seguito. Ciocchè ec.

211. *Coroll.* I. Poichè la distanza MN è la differenza delle altezze MF, NF, ossia dei quadrati 16, 9, sarà MN = 7. Per la stessa ragione NO = 5, OP = 3, PF = 1. Però, essendo i cilindri ABGH, BCQG, CRSQ, RDES, attesa l' eguaglianza delle basi, proporzionali alle loro respettive altezze MN, NO, OP, PF, le quantità delle acque, che in tempi eguali sortono per il foro F di un vase prismatico, mentre questo si vota, si scemano secondo l' ordine retrogrado dei numeri dispari 7, 5, 3, 1.

212. *Coroll.* II. Adunque se si avrà un vase prismatico pieno di acqua, che si vota per il suo piccol foro in 12 ore, affine di fare la divisione delle parti da evacuarsi ad ogni ora, basterà continuare la serie dei numeri dispari per 12 termini, vale a dire 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, e presa poscia la somma di questi = 144, ch'è il quadrato di 12, divider tutta l' altezza MF del vase in 144 parti eguali, e condurre finalmente i piani orizzontali in modo, che incominciando dalla base DE, la di-

ſtanza PF ſia 1, la diſtanza OP ſia 3, e così di seguito. Nell'uso di queſta clepſidra cilindrica bisogna aver riguardo a ciò, che abbiamo già avvertito (202.).

C A P O IX.

Della misura dell'acqua, che ricevono i vaſi, mentre ſi riempiono per un piccol foro, e del tempo, che vi mettono nei loro riempimenti.

213. AVviene speſſe volte, che i vaſi ſi riempiano per un piccol foro, che ſi trova o nel vase recipiente, o nel vase, che gli somminiſtra l'acqua. Quanto adunque è il tempo, che deve mettere in ambedue i caſi il recipiente a riempierſi? Quanta l'acqua, che deve ricevere in un dato tempo? Queſta ricerca, quantunque abbia negli uſi della vita umana il suo vantaggio, ſi trascura comunemente negli elementi d'Idraulica, accontentandoſi gli Scrittori di queſta del solo esame del tempo, che mettono i vaſi nelle loro evacuazioni. Noi però, che non vogliamo ommettere veruna cosa, che poſſa rendere iſtruttiva, utile, ed amena queſta noſtra, qualunque eſſa ſiaſi, Inſtituzione, portiamo su di queſta materia i seguenti Problemi, che riguardano parte il tempo, che mettono i vaſi nei loro riempimenti,

parte anche la quantità del fluido, che negli stessi ricevono.

PROBLEMA I.

Ritrovare il tempo, che deve mettere un dato vase a riempiersi di acqua nell'ipotesi, ch'esso sia sottoposto al foro di un altro dato vase mantenuto sempre pieno alla stess' altezza.

214. Sia ACDB (fig. 2.) il dato vase, che somministra l'acqua al vase recipiente, e si chiami a l'altezza costante dell'acqua contenuta, e f l'area del foro MN espressa in pollici quadrati. Al foro MN si sottoponga il dato recipiente, e trovato col mezzo delle regole della Geometrìa il di lui volume in pollici cubici, si dica n il numero di questi. Egli è chiaro, che il tempo, che deve mettere questo vase a riempiersi intieramente di acqua, dev'essere eguale a quello, che impiegherebbe il vase ACDB a mandare per il foro MN un numero n di pollici cubici di acqua. Si cerchi ora questo tempo t (100.): si troverà $t = \frac{8n}{5f\sqrt{a.2g}}$ secondi, essendo in questo caso $Q' = n$. Perciò anche il tempo, che deve mettere il vase recipiente a riempiersi di acqua nell'ipotesi, che venga esso

sottoposto al foro MN del vase ACDB mantenuto sempre pieno alla stessa altezza, dev' esser $= \frac{8n}{5f\sqrt{a.2g}}$ secondi. Ciocchè ec.

215. *Scolio*. Quando col mezzo della Geometrìa non si può ritrovare la misura del volume interno di un vase, si può allora idraulicamente ricercare in questo modo. Si riempia il vase di acqua esattamente, e si misuri colla pinta di Parigi l'acqua contenuta. Sarà il volume interno del vase eguale al numero delle pinte ritrovate, essendo esso eguale al volume dell'acqua rinchiusa. Se il numero delle pinte si moltiplicherà per 48, si avrà in pollici cubici il volume interiore del vase, giacchè la pinta è di 48 pollici cubici. Se il vase contenesse un certo numero di pinte con un residuo di acqua, si potrà facilmente questo valutare in pollici cubici, principalmente se la pinta, che si adopera, è graduata. Si può anche ritrovare l'interior volume di un vase, pesando l'acqua contenuta. Si dica n il numero delle libbre parigine, che contiene il peso di questa. Poichè un piede cubico di acqua pesa 70 libbre parig., e contiene 1728 pollici cubici, se si farà $70 : 1728 = n : x$, si avrà x, ossia il numero dei pollici cubici, che contiene il volume dell'acqua rinchiusa, ossia il volume interno del vase, $= \frac{1728 . n}{70}$ pollici cubici parigini.

PROBLEMA II.

Ritrovare il tempo, che mette l' aria dell'atmosfera a riempiere l' interna cavità di un cannone dopo lo sparo di questo.

216. Si supponga il vase ACDB (fig. 3.) chiuso dappertutto, e voto di aria. Egli è chiaro, che il tempo, ch' esso deve mettere, allorchè si apre il foro Dd, a riempiersi di aria atmosferica, dev'esser $= \frac{8n}{5f\sqrt{313600 \cdot 2g}}$ secondi (100.), dove n esprime il numero dei pollici cubici, che contiene il volume del vase ACDB, essendo il suddetto tempo appresso a poco a quello, che metterebbe un altro vase a mandare per un egual foro nel voto un numero n di pollici cubici di aria atmosferica, s' esso fosse pieno di aria egualmente densa, che quella, che si respira sulla superficie della Terra, dappertutto fino all'altezza di 313600 pollici (60.). Dissi *appresso a poco*, principalmente perchè l'aria, ch'entra prima nel vase, resiste all' ingresso dell' altra mediante la sua elasticità. Ora si ponga, che l' aria entri nel vase ACDB per l'apertura AB, e che il vase sia cilindrico: sarà il tempo, che mette questo vase a riempiersi di aria, chiamata l la sua lunghezza, sarà, dico, $=$

$$\frac{8l}{5\sqrt{313600.\ 2g}}$$ secondi, essendo in questo caso $n = fl$. Tale si è in circa il tempo, che impiega l'aria dell'atmosfera a riempiere un cannone dopo lo sparo, giacchè si sa, che nel di lui sparo per l'accensione della polvere, che caccia fuori la palla, formasi dentro uno spazio quasi voto di aria. Ciocchè ec.

PROBLEMA III.

Ritrovare il tempo, che mette il mercurio a riempiere un tubo da barometro voto di aria, allorchè l'estremità di questo giace immersa in un vase pieno di mercurio, fino all'altezza di 28 pollici al di su del suo livello.

217. Si ponga immersa l'estremità di un tubo da barometro voto di aria in un vase pieno di mercurio, e si chiami m la mutua sezione del tubo, e della superficie del mercurio nel vase. Egli è chiaro, che la sezione m dev'essere spinta all'insù dalla pressione dell'aria esteriore con forza eguale al peso di una colonna di mercurio, la quale abbia per base la stessa sezione, e per altezza 28 pollici. Quindi è, che la sezione m di mercurio dev'essere mossa all'insù con quella stessa velocità, che avrebbe acquistata, cadendo

liberamente dall'altezza di 28 pollici (26.), ossia deve salire dentro il tubo voto di aria fino all'altezza di 28 pollici con moto uniformemente ritardato (17.), dove giunta non può più discendere, essendo allora la colonna del mercurio sollevato in equilibrio colla pressione dell'aria dell'atmosfera. Quindi è anche, che il tempo, che mette il mercurio ascendente a riempiere il tubo fino all'altezza di 28 pollici al di su del livello del mercurio contenuto nel vase, deve essere eguale al tempo, che metterebbe un grave a discendere in vigore della sola sua gravità dall'altezza di 28 pollici. Ora questo tempo così si trova. Poichè nella libera discesa dei gravi le radici degli spazj descritti sono come i tempi (15.), e poichè un grave in quella percorre in un secondo $15 + \frac{1}{11}$ piedi parigini, siccome abbiamo più volte detto, ossia 181 pollici, se si farà $\sqrt{181} : \sqrt{28} = 1 : x$, si avrà il tempo x, che mette un grave a discendere in vigore della sua gravità dall'altezza di 28 pollici, ossia il tempo, che mette il mercurio a riempiere il tubo fino all'altezza di 28 pollici $= \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{181}}$ secondi $=$ 23 terzi in circa. Ciocchè ec.

218. *Scolio*. Nello stesso modo si deve procedere per ritrovare il tempo, che dovrà mettere l'acqua a riempiere lo stesso tubo fino all'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi, ossia di 392 pollici

parigini, venendo l'acqua dentro i tubi voti di aria sollevata fino a quell'altezza dalla pressione dell'aria.

PROBLEMA IV.

Ritrovare il tempo, che deve mettere un dato vase a riempiersi di acqua nell'ipotesi, che il dato vase, che gli somministra l'acqua, sia prismatico, e si voti per un piccol foro.

219. Si cerchi il volume interno del vase, che riceve l'acqua (215.), e si dica v. Si ponga, che nel tempo, che impiega il recipiente a riempiersi intieramente di acqua, la superficie AD del dato vase prismatico ABCD (fig. 19.) discenda per la parte ignota AE dell'altezza AB dell'acqua contenuta. Sarà il volume AEGD lasciato dall'acqua dentro il vase ABCD eguale al volume v del recipiente, ossia, poichè, chiamata x la parte AE dell'altezza AB, e B la base BC del vase ABCD, il volume $AEGD = Bx$, sarà $v = Bx$; e però $x = \frac{v}{B}$. Quindi se si ricercherà il tempo, che impiega la superficie AD a discendere per la parte ritrovata AE dell'altezza AB dell'acqua contenuta nel vase ABCD, mediante l'equazione $t = \frac{8B}{5F} \cdot (\sqrt{(\frac{2A}{g})} - \sqrt{(\frac{2a}{g})})$

(205.), dove B esprime la base del vase ABCD, F l'area del foro F, A l'altezza AB dell'acqua contenuta, *a* finalmente la parte EB dell'altezza AB, si avrà anche il tempo, che metterà il dato vase a riempiersi intieramente di acqua. Ciocchè ec.

PROBLEMA V.

Da un barile di vino si cava ogni dì per la spina una misura di vino, e vi s'infonde per il cocchiume altrettanto di acqua: si dimanda

I. *Quanto di vino, e di acqua resta nel barile dopo un dato numero di giorni?*

II. *Quante misure di vino si debbon cavare, e di acqua infondere, affinchè resti nel barile tanto di vino, quanto di acqua?*

220. I. Si cerchi il volume interno del barile, e si dica n il numero dei pollici cubici, ch'esso contiene. Si cerchi inoltre, a quanti pollici cubici equivalga la misura, che si adopera nel cavare dal barile il vino ogni dì, e si dica b il numero di quelli. Egli è chiaro, che la quantità del vino, che resta nel barile dopo il primo dì, dev'esser $= n - b$. Ma quanto si è il vino, che resta nel medesimo dopo il secondo dì? Ognun vede, che il vino, che si cava nel secondo giorno

dal barile, è misto con un pochino di acqua, giacchè qui si suppone, che l'acqua infusa nel barile nel primo giorno siasi uniformemente distribuita in tutta la massa del vino contenuto. Si cerchi adunque la quantità del vin puro cavato nel secondo dì, ragionando in questo modo: se un volume n di vin misto contiene la quantità $n - b$ di vin puro, quanto di questo ne deve contenere la misura b di vin misto cavata nel secondo dì. Si troverà, facendo $n : n - b = b : x$, la ricercata quantità $x = \frac{nb - b^2}{n}$. Quindi, poichè la quantità del vino, che resta nel barile dopo il secondo dì, dev'essere eguale a quella, che vi resta dopo il primo dì, meno il vino estratto nel secondo dì, dev'esser la stessa $= n - b - \frac{nb + b^2}{n} = (n - b) . \left(\frac{n - b}{n}\right)$.

Nello stesso modo si troverà la quantità del vino residuo nel barile dopo il 3.° giorno $= (n - b) . \left(\frac{n - b}{n}\right)^2$, dopo il 4.° $= (n - b) . \left(\frac{n - b}{n}\right)^3$, dopo il 5.° $= (n - b) . \left(\frac{n - b}{n}\right)^4$, e così di seguito. Questi termini compongono, siccome ciascun vede, una progressione geometrica, in cui son noti il primo termine $n - b$, l'esponente della ragione, secondo cui procedono i termini, il numero finalmente dei termini della stessa, essendo

sendo questo eguale al dato numero dei giorni, ossia al dato numero delle misure del vino cavato. Ora dalla dottrina delle progressioni geometriche si sa, che, quando si conoscono le tre suddette cose, si trova l'ultimo termine col mezzo di questa formola $d = pm^{r-1}$, dove d dinota l'ultimo termine, p il primo, m l'esponente, r finalmente il numero dei termini della progressione. Quindi, poichè l'ultimo termine della nostra progressione si è la quantità del vino, che resta nel barile dopo il dato numero dei giorni, se questa quantità si chiamerà Q, si troverà, fatta la sostituzione, $Q = (n - b) \cdot \left(\frac{n-b}{n}\right)^{r-1}$ $= \frac{\overline{n-b}^{\,r}}{n^{r-1}}$. Quindi anche facilmente si ritrova la quantità dell'acqua, che resta nel barile dopo il dato numero dei giorni, non essendo essa, che il compimento di $\frac{\overline{n-b}^{\,r}}{n^{r-1}}$ al valore di n.

II. essendo $d = pm^{r-1}$ in ogni progressione geometrica, siccome abbiam detto di sopra, ne siegue, che $r = \frac{\log. d - \log. p}{\log. m} + 1$ (137.); dal che si ricava la soluzione della seconda parte. Imperocchè, essendo in questo caso la quantità del vino, che resta nella botte, $= \frac{1}{2} n$, ossia

l'ultimo termine della progreſſione $d = \frac{1}{2} n$, il primo termine $p = n - b$, e l'esponente $m = \frac{n-b}{n}$, fatta la soſtituzione, ſi troverà il numero r dei termini della progreſſione, oſſia il numero delle misure di vino, che ſi debbon cavare dal barile, e di acqua, che vi ſi debbono infondere, affinchè vi reſti tanto di vino, quanto di acqua,

$$= \frac{\log. \frac{1}{2} n - \log. n - b}{\log. \frac{n-b}{n}} + 1 .$$ Ciocchè ec.

Esempio. Da un barile di 10 boccali di vino ſi son cavati per la spina ogni dì un boccale di vino, e vi ſi è infuso per il cocchiume altrettanto di acqua. Si dimanda

I. Quanto di vino, e di acqua reſta nel barile dopo 6 giorni? Egli è chiaro, che, essendo $n = 10$, $b = 1$, $r = 6$, dev'eſſer $Q = \frac{n-b^r}{n^{r-1}} = \frac{9.^6}{10.^5} = 5 + \frac{31441}{100000}$ boccali. Perciò la quantità dell'acqua $= 4 + \frac{68559}{100000}$ boccali, essendo queſto il compimento di quello ai 10 boccali.

II. Quanti boccali di vino s'han da cavare, e di acqua da infondere, perchè il vino, che reſta, ſia eguale all'acqua? Eſſendo $\frac{1}{2} n = 5$, $n - b = 9$, $\frac{n-b}{n} = \frac{9}{10}$, fatta la soſtituzione ſi tro-

verà $r = \frac{\log. 5 - \log. 9}{\log. \frac{9}{10}} + 1 =$

$\frac{06989700 - 09542425}{-457575} + 1 = - \frac{2552725}{-457575}$

$+ 1 = 6 + \frac{264850}{457575}$ boccali. Onde resterà nel barile tanto di vino, quanto di acqua, se nel settimo dì non si caverà, nè s' infonderà se non la parte $\frac{264850}{457575}$ di un boccale.

PROBLEMA VI.

Ritrovare il tempo, che impiega l'acqua, che ad un dato vase prismatico FEDC *trasmette* (fig. 21.) *per via di un piccol foro* eF, *o di un piccol tubo un altro vase* ABFC *mantenuto costantemente pieno fino all' altezza* AB, *a riempierlo fino ad una data altezza* Co, *ossia ad arrivare ad una posizione qualunque orizzontale* no.

221. Egli è chiaro, che allorchè si apre il foro *e*F del vase ABFE pieno di acqua costantemente, deve l'acqua lanciarsi dentro il vase FEDC con velocità conveniente all'altezza *e*E dell'acqua contenuta nell' altro vase. Se l'acqua, ch'entra per il foro *e*F nel vase FEDC, potesse scappare, nè vi si fermasse dentro, la sua velo-

cità resterebbe sempre la stessa, supponendosi il vase ABFE mantenuto costantemente pieno fino all'altezza *e*E sopra il foro. Ma, poichè l'acqua, che vi entra, non può scappare, ma vi si ferma dentro, ben si vede, che la piccola massa di acqua, che ad ogni istante per il piccol foro *e*F entra nel vase FEDC, e che va ad urtare nell'acqua già entrata, deve, mediante questo suo urto, perdere a poco a poco la velocità del suo getto, cosicchè, quando la massa dell'acqua entrata rispetto a quella, che ad ogni istante entra, è infinitamente grande, dev'essa restare sensibilmente distrutta. Si ponga dunque il foro *e*F infinitesimo, e finita la massa F*mr*C dell'acqua nel vase FEDC. Poichè la quantità dell'acqua, che ad ogn'istante porta il foro *e*F nel vase FEDC, è infinitesima rispetto alla quantità dell'acqua F*mr*C contenuta dentro questo, l'urto del fluido, ch'entra, contro il fluido F*mr*C non dev'esser più sensibile. Però in questo caso la superficie *mr* dell'acqua F*mr*C si solleva dentro il vase FEDC, come se la velocità dell'acqua nel foro *e*F fosse ad ogn'istante dovuta soltanto all'eccesso *m*E dell'altezza totale *e*E dell'acqua nel vase ABFE sopra l'altezza dell'acqua nel vase FEDC, restando le pressioni delle acque MBF*m*, F*mr*C, che sono egualmente alte, e comunicanti assieme, per essere contrarie, distrutte fra loro scambievolmente.

Ora si supponga il vase E*mr*D pieno di acqua, e che questa, venendo sottomessa all'azione

di una forza eguale a quella della gravità, ma diretta dall'ingiù all'insù si voti per un piccol foro scolpito nel fondo superiore ED, ed eguale al foro eF. Egli è chiaro, che in questa ipotesi la velocità, con cui l'acqua sale dentro il vase $EmrD$, è esattamente la stessa, che quella, che ha negli strati stessi l'acqua, che si solleva dentro la parte $EmrD$ del vase EFCD per l'acqua, che vi entra per il foro eF. Si cerchi adunque il tempo, che in questa ipotesi mette la superficie mr per arrivare da mr in no. Sarà (205) $t = \frac{8B}{5F} \cdot (\sqrt{(\frac{2A}{g})} - \sqrt{(\frac{2a}{g})})$, dove B esprime la base di $EmrD$, F l'area del foro scolpito nel fondo superiore ED, ed eguale al foro eF, A l'altezza totale mE dell'acqua nel vase $EmrD$, a finalmente la parte nE di mE. Questo sarà anche il tempo, che impiegherà la superficie mr dell'acqua $mFCr$ nel vase EFCD a sollevarsi fino in no per l'acqua, che ad ogni istante vi porta il piccol foro eF.

L'altezza em non può essere, che piccola, principalmente se il vase FEDC è largo. Quando adunque si tratta di determinare il tempo, che deve metter l'acqua ad arrivare all'altezza em, dove cessa sensibilmente l'urto della piccola massa, che ad ogni momento entra per il foro eF, contro la massa finita d'acqua $FmrC$, si deve fissare un piccol numero di pollici maggiore o minore, secondo la minore o maggiore larghezza

del vase, e poscia ricercare il tempo, che impiegar deve la quantità dell' acqua $FmrC$ a sortire per il foro eF del vase $ABFE$ sotto la costante altezza eE, siccome abbiam già insegnato (100.). Questo sarà il tempo, che appresso a poco metterà l'acqua ad arrivare all'altezza em, dove cessa sensibilmente la velocità del getto del fluido, che per il foro eF entra nel vase $FEDC$. Se gli si aggiungerà l' altro tempo t ritrovato, che mette la superficie mr ad arrivare nella posizione no, si avrà il tempo totale, che l' acqua impiegherà ad arrivare da e in n, ossia alla posizione orizzontale no. Ciocchè ec.

222. *Coroll.* I. Si ponga il vase v della stessa base, ed altezza del vase $EmrD$ pieno di acqua, e che abbia nel suo fondo scolpito un piccol foro eguale al foro eF. Egli è chiaro, che il vase v si troverà intieramente nello stesso tempo, che il vase $EmrD$ mette a riempiersi intieramente per l' acqua, che gli somministra il foro eF. Quindi è, che, essendo il tempo, che impiega nella sua evacuazione il vase v, doppio di quello, ch' esso impiegherebbe nel mandare per lo stesso foro la stessa quantità di acqua, se (207.) fosse mantenuto costantemente pieno, deve anche il tempo, che mette il vase $EmrD$ a riempiersi intieramente di acqua, esser doppio di quello, che metterebbe lo stesso a mandare dallo stesso foro eF, se questo fosse scolpito nel suo fondo, la stessa quantità di acqua, mantenendosi

costantemente pieno fino all'altezza *m* E sopra il foro.

223. *Coroll.* II. Quindi s' intende, in qual maniera si possa ritrovare il tempo, che deve mettere l'acqua, ch'entra per il foro F nel vase ADEH (fig. 20.) perpendicolarmente immerso fino alla profondità DB in un gran tratto di acqua, ad arrivare nella posizione orizzontale CQ, essendo manifesto, che, entrata nel vase ADEH la massa finita di acqua DRSE, deve subito cessare sensibilmente il getto, e che quindi la superficie RS del fluido DRSE deve sollevarsi dentro il vase, come se la velocità dell'acqua nel foro F fosse ad ogni istante dovuta unicamente all'eccesso dell'altezza DB dell'acqua ambiente sopra l'altezza dell'acqua contenuta. Il tratto dell'acqua dev'esser sì grande, che la sua superficie sensibilmente non s'innalzi, mentre vi s'immerge il vase ADEH, nè s'abbassi, mentre nello stato d'immersione vi entra l'acqua per il foro F.

APPENDICE.

Del tempo, che mette l' acqua nel fare le sue oscillazioni, e ondulazioni.

224. Nella Meccanica si dimostra,

I. Che, quando il pendolo P, sospeso col

mezzo (fig. 22.) di un filo PA, descrive l'arco di cerchio PB*p*, oppure OB*o*, oscillando intorno al punto A di sospensione, stà la forza totale della gravità alla forza parziale della stessa, che ne accelera il di lui moto nel punto P per l'arco PB come il seno tutto al seno retto dell'angolo PAB di elevazione, ossia nell'ipotesi, che quest'angolo sia piccolo, come la lunghezza PA del pendolo all'arco PB, essendo i seni retti, allorchè piccoli sono gli angoli, sensibilmente come gli archi.

II. Che, quando gli archi, che descrive un pendolo, sono piccoli, le sue oscillazioni sono sensibilmente isocrone, ossia di egual durata, quantunque gli archi descritti sieno disuguali.

III. Che finalmente, quando i pendoli, che descrivono piccoli archi di cerchio, hanno differenti lunghezze, le durate delle loro oscillazioni sono fra loro nella stessa ragione delle radici quadrate delle lunghezze.

TEOREMA.

Siavi il sifone ABDH, *composto dai tubi verticali* (fig. 23.) AF, HG, *e dal tubo orizzontale* BFGD *comunicanti fra loro, e dello stesso diametro, e vi s'infonda dell'acqua sino all'altezza* BC, *cosicchè, diventando essa stagnante, abbia le sue superficie* CC, cc *nello stesso piano orizzontale* Cc.

Dico, che, se le si toglierà il suo stato di equilibrio, obbligandola ad elevarsi dentro il ramo AF *al di su di* CC *fino in* AA, *dovrà essa poscia, abbandonata all' azione della sua gravità, fare, detratti gl' impedimenti, perpetuamente le sue oscillazioni, passando alternativamente dalla situazione* ABDM *in* HDBE, *e da questa in quella, e così di seguito.*

225. Poichè l'acqua è elevata dentro il ramo AF del sifone al di su di CC fino in AA, deve la stessa esser nell'altro ramo HG abbassata al di sotto di *cc* fino in MM in modo, che sia *c*M=CA. Perciò l'acqua nel ramo AF deve discendere in vigore della sua gravità da AA in CC, dov'è il luogo del suo equilibrio. Ma, poichè l'acqua, mentre arriva in CC, ha la velocità acquistata nella sua discesa da AA in CC, essa non può ivi fermarsi; ma deve oltre CC discendere fino in EE, descrivendo lo spazio CE nello stesso tempo, in cui ha descritto l'eguale spazio AC. Intanto l'acqua, che si contiene nell' altro ramo HG del sifone, viene dal peso dell' acqua discendente spinta da MM in *cc*, dove stà il luogo del suo equilibrio, oltre il quale poi ascende in HH unicamente in vigore della velocità acquistata nella sua ascesa da MM in *cc*. Quindi si vede, che, mentre l' acqua discende

nel ramo AF da AA in CC con moto accelerato, l'acqua nell'altro ramo ascendente con moto egualmente accelerato da MM in *cc*, cosicchè sì l'una, come l'altra arriva nello stesso tempo al piano orizzontale C*c*; e mentre la prima discende con moto ritardato da CC in EE, l'altra con moto egualmente ritardato ascende da *cc* in HH. Ond'è, che anche gli spazj M*c*, *c*H debbono essere fra loro eguali, e descritti nello stesso tempo, in quel tempo cioè, che vengono percorsi gli spazj AC, CE. Finalmente l'acqua arrivata in HH, avendo perduta tutta la sua velocità acquistata nell'ascesa da MM in *cc*, deve tornare a discendere fino in *cc* con moto accelerato, mentre nell'altro ramo con moto egualmente accelerato ascende da EE in CC: poscia la stessa deve tornare a discendere per l'eguale spazio *c*M con moto ritardato, mentre nell'altro ramo con moto egualmente ritardato ascende fino in AA. L'acqua dunque dentro il sifone ABDH fa le sue oscillazioni, passando alternativamente dalla situazione ABDM nella situazione HDBE, e da questa in quella, e così di seguito, detratti gl'impedimenti, perpetuamente. Ciocchè ec.

226. *Scolio*. Due sono gl'impedimenti principali, che si oppongono alla perpetuità di questo moto di oscillazione, la resistenza cioè dell'aria, e il mutuo attrito dell'acqua coll'interna superficie del sifone. Da queste due cagioni ne nasce principalmente, che l'acqua non mai risale alla

ſteſs' altezza, da cui è discesa, e che gli spazj, che descrive, ſi vanno di mano in mano scemando, finchè reſta il suo moto intieramente diſtrutto; il che succede, quando l'acqua nel ſifone ha le sue due superficie CC, *cc* nello ſteſſo piano orizzontale.

227. *Coroll.* I. Il tempo, che mette l'acqua nel ſifone ABDH a fare una oscillazione, oſſia a paſſare dalla sua ſituazione ABDM nella ſituazione HDBE, è uguale a quello, che mette la ſteſs' acqua nel ramo AF a discendere da AA in EE. Onde affinchè l'acqua poſſa ritornare al luogo AA, da dove è discesa, deve l'acqua dentro il ſifone fare due oscillazioni, paſſare cioè dalla ſituazione ABDM in HDBE, e da queſta in quella.

228. *Coroll.* II. Poichè la forza, che fa oscillar l'acqua dentro il ſifone, è il peso della colonna AEEA di acqua, oſſia il doppio peso della colonna ACCA di acqua, eſſendo egli chiaro, che, quando l'acqua sale dentro il ramo AF fino in AA, allora la ſteſſa discende nell' altro HG fino in MM, ne ſiegue, che, chiamata F la forza suddetta, *g* il peso di un piede cubico di acqua, sarà, esprimendo in piedi cubici il volume della colonna ACCA, $F = 2AA . AC . g$. Inoltre, poichè il peso, che mette in moto la forza F, è quello di tutta l'acqua, che ſi contiene nel ſifone, dev'eſſer, chiamando P' il suddetto peso, $P' = AA . \overline{mr + rs + sn} . g$,

dove $mr + rs + sn$ dinota la lunghezza dell'acqua contenuta nel sifone. Però si avrà $F : P' = 2AA . AC . g : AA . \overline{mr + rs + sn} . g = 2AC : mr + rs + sn = AC : \frac{mr + rs + sn}{2}$.

PROBLEMA I.

Determinare, se le oscillazioni, che fa l'acqua dentro il sifone ABDH, *quantunque disuguali, si faccian tutte nello stesso tempo, ossia se siano isocrone.*

229. Si supponga, che l'acqua in una sua oscillazione discenda da AA in EE, e in un' altra da aa in ee. Sarà la forza, che fa oscillar l'acqua nel 1.° caso, ossia $F = AA . AE . g$, nel 2.° $f = aa . ae . g$. Quindi si avrà $F : f = AA . AE . g : aa . ae . g = AE : ae$, essendo $g = g$, ed $AA = aa$. Adunque, poichè le forze, che fanno oscillare la stessa massa di acqua, sono proporzionali agli spazj AE, ae, che questa descrive, debbono questi stessi spazj AE, ae esser descritti nello stesso tempo, essendo egli chiaro, che uno spazio S doppio, triplo, quadruplo ec. di un altro s dev' esser percorso nello stesso tempo, che quest' ultimo, se la forza, che mette in moto il corpo per lo spazio

S, è doppia, tripla, quadrupla ec. dell'altra, che mette in moto lo stesso corpo per lo spazio *s*. Ora se gli spazj AE, *ae* sono dall'acqua nel ramo AF percorsi nello stesso tempo, anche le oscillazioni, che fa l'acqua dentro il sifone, debbon farsi nello stesso tempo. Le oscillazioni adunque dell'acqua dentro il sifone ABDH, quantunque disuguali, sono isocrone. Ciocchè ec.

PROBLEMA II.

Costruire un pendolo, che faccia le sue oscillazioni nello stesso tempo, che le fa l'acqua dentro il sifone ABDH.

230. SI prenda il pendolo P, la di cui lunghezza PA sia eguale (fig. 22. 23.) alla metà della lunghezza dell'acqua nel sifone, ossia PA $= \frac{mr + rs + sn}{2}$. Poscia, abbassata dal punto A di sospensione la verticale AB, si prenda l'arco OB $=$ AC. Se il pendolo P si metterà in O, esso farà la sua intiera oscillazione per l'arco OB*o* nello stesso tempo, che mette l'acqua dentro il ramo AF nella sua discesa da AA in EE, ossia, che mette l'acqua dentro il sifone ABDH nel fare una sua oscillazione, passando dalla situazione ABDM in HDBE. Infatti si supponga, che il pendolo P abbia la stessa massa, che ha

l'acqua nel sifone. Poichè la forza, che fa oscillar l'acqua dentro il sifone, stà al peso di questa, ossia, poichè $F : P' = AC : \frac{mr + rs + sn}{2}$ (228), deve anche stare $F : P' = OB : PA$, essendo per costruzione $AC = OB$, $\frac{mr + rs + sn}{2} = PA$. Ma OB stà a PA, come la gravità parziale, che accelera il moto del pendolo per l'arco OB, alla gravità totale, che accelererebbe il moto dello stesso pendolo P, se questo in O discendesse liberamente secondo la direzione verticale (224.). Però, chiamata G la gravità totale, G' la parziale, deve stare $G : G' = P' : F$. Si ponga m la massa dell'acqua nel sifone: si avrà, moltiplicando per m ciascun termine della prima ragione della proporzione $Gm : G'm = P' : F$. Ora $Gm = P'$, non essendo il peso P' dell'acqua nel sifone, che il prodotto della sua massa m nella gravità totale. Perciò anche $Gm = F$. Adunque, poichè l'acqua dentro il sifone, e il pendolo vengono animati dalla stessa forza: poichè le masse, che questa stessa forza mette in moto, sono eguali: poichè finalmente gli spazj, che queste masse han da descrivere, sono parimente uguali, debbono i tempi, in cui si descrivono questi spazj nel sifone, e nell'arco circolare, essere eguali, ossia debbon le oscillazioni sì dell'acqua nel sifone, come anche del pendolo farsi nello stesso tempo. Il

pendolo P deve fare le sue oscillazioni nello stesso tempo, che fa le sue l'acqua nel sifone, ancorchè la sua massa sia minore di quella dell' acqua, essendo la forza acceleratrice G', che anima il pendolo P alla discesa per l'arco OB la stessa in tutte le sue particelle. Ciocchè ec.

231. *Coroll.* I. Quindi ne siegue, che nel tempo, che l'acqua in uno dei due rami del sifone fa una sola discesa, o ascesa, deve il pendolo fare nello stesso tempo una oscillazione per l'arco OB*o*, siccome in questo stesso tempo l'acqua dentro il sifone fa una sola oscillazione (227.). Perciò, perchè possa l'acqua nel ramo AF ritornare al luogo AA, da dove è discesa fino in EE, deve il pendolo fare due oscillazioni.

232. *Coroll.* II. Poichè il tempo, che mette un pendolo nel fare una sua intiera oscillazione, è come la radice della sua lunghezza (224.), sarà anche il tempo, che metterà l'acqua nel fare una sua oscillazione come la radice della metà della lunghezza dell'acqua nel sifone, ossia, essendo le parti simili come i loro tutti, come la radice della stessa lunghezza. Perciò se si accrescerà, o si scemerà la lunghezza dell'acqua nel sifone, si accrescerà anche, o si scemerà il tempo delle sue oscillazioni in ragione subduplicata della stessa.

233. *Coroll.* III. Poichè un pendolo, che abbia la lunghezza PA = 3 piedi, 8 $\frac{28}{100}$ linee

parigine, fa in Roma ad ogni secondo una oscillazione, ſiccome hanno oſſervato i PP. Boscovich, Le Seur, e Jacquier, se l'acqua contenuta nel ſifone avrà una lunghezza doppia dell'accennata, oſſia = 6 piedi, 1 pollice, $4 \frac{56}{100}$ linee, farà anch'eſſa ad ogni secondo le sue oscillazioni. In queſto caso l'acqua nel ramo AF impiegherebbe due secondi ritornando al luogo AA, da cui è discesa in EE. Imperocchè deve mettere un secondo nella sua discesa da AA in EE, e un altro nella sua ascesa da EE in AA.

234. *Scolio*. I pendoli, che ad ogni secondo fanno una oscillazione, non hanno dappertutto, ſiccome ciascun Fiſico sa, la ſteſſa lunghezza, non eſſendo la forza della gravità, che gli anima alla discesa, dappertutto la ſteſſa. Però, quando ſi vuole determinare con esattezza la lunghezza, che deve avere in un dato luogo l'acqua dentro di un ſifone, perchè poſſa fare in un secondo una sua oscillazione, bisogna in quello ſteſſo luogo ritrovare la conveniente lunghezza del pendolo. Ma come queſta ſi ritrova? Eſſendo il numero delle oscillazioni, che in un dato tempo fanno due pendoli ſimili, tanto maggiore, quanto minore ſi è il tempo, che mettono nel farne ciascuna, oſſia in ragione inversa della durata di ciascuna delle loro oscillazioni, dev'eſſer il numero delle oscillazioni, che in un dato tempo fanno due pendoli ſimili, in ragione inversa delle radici delle lunghezze degli

ſteſſi

stessi (224.). Ora si prenda un corpo, che sotto un piccol volume rinchiuda molta materia, una palla, per esempio, di piombo, di rame, o di oro, e si sospenda questa per un fil di metallo sottilissimo, la cui lunghezza esattamente misurata sia di tre, o quattro piedi parig., e si chiami questa L. Si faccia poscia oscillare questo pendolo, allontanandolo pochissimo dalla verticale, e si conti il numero delle oscillazioni, che farà in un dato tempo ben misurato, in un' ora cioè, e si dica questo numero N. Quindi, poichè un pendolo, che fa una oscillazione ad ogni secondo, ne fa 3600 in un'ora, giusto poichè in un'ora vi sono 3600 secondi, si troverà la lunghezza x, che conviene a questo pendolo, se si farà N : 3600 $= \surd x : \surd L$, e sarà $\surd x = \frac{N \surd L}{3600}$, ossia $x = \frac{N^2 L}{3600^2}$. In questo modo ha ritrovato il Sig. Mayran, che, affinchè un pendolo semplice possa fare in Parigi una oscillazione ad ogni secondo, dev'esser colà la sua lunghezza di piedi parig. 3, linee $8\frac{47}{100}$: Bouguer sotto l'Equatore di piedi parig. 3, linee $7\frac{11}{100}$: Maupertuis sotto il cerchio Artico di piedi parig. 3, linee $9\frac{17}{100}$.

PROBLEMA III.

Costruire un pendolo, che faccia le sue oscillazioni nello stesso tempo, che fa un' onda le sue ondulazioni.

235. Sia AB la superficie orizzontale (fig. 24.) di un' acqua stagnante, e venga essa nella sua parte *mr* premuta all' ingiù, qualunque sia la causa di questa pressione. Egli è chiaro, che deve l' acqua abbassarsi in *mr*, innalzandosi nello stesso tempo l' acqua, che stà all' intorno della cavita *m*D*r* formata, all' altezza *c*C in modo, che la mole dell' acqua elevata faccia un cerchio, il di cui centro si trovi nella parte più bassa D della cavità. L' altezza, a cui sale l' acqua intorno alla cavità, dev' esser, siccome ognun vede, maggiore, o minore, secondochè maggiore, o minore si è la pressione esercitata sulla parte *mr* della superficie dell' acqua stagnante, ossia secondochè maggiore, o minore si è la profondità *g*D della cavità *m*D*r* prodotta dalla pressione. La cavità *m*D*r* insieme coll' acqua elevata tutto all' intorno all' altezza *c*C chiamasi *Onda*. Però l' onda comprende nella superficie dell' acqua agitata l' estensione CDE, e la sua larghezza si misura dalla distanza, che passa dalla sommità C alla sommità E.

Il moto successivo delle onde si fa in que-

sto modo. L'acqua elevata alla sommità E, non potendo per esser grave sostenersi a quell'altezza, precipita sulla parte sottoposta rs, e in vigore della velocità acquistata nella sua discesa forma sotto di quella una cavità eguale, e simile al volume rEs dell'acqua elevata, ossia eguale alla cavità primiera mDr, oppure sFn. Quindi ne siegue.

I. Che, mentre l'acqua sollevata precipita dall'altezza Ee, l'acqua, che giace sotto le cavità mDr, sFn s'innalza fino alla superficie orizzontale AB, dove stà il luogo del suo equilibrio, e mentre l'acqua precipitata dall'altezza Ee s'abbassa in vigore della velocità acquistata sotto la superficie AB alla profondità $ed = Ee$, l'acqua, che ha già riempiute le cavità mDr, sFn, si solleva al di su della stessa superficie fino in b, e f, cosicchè le altezze gh, of sieno eguali alla profondità ed.

II. Che nel tempo, che mette l'acqua elevata nella sua discesa per Ed, l'onda CDE percorre nel suo moto uno spazio eguale alla metà della sua larghezza CE, avanzandosi essa in quel tempo per uno spazio $= dF = \frac{1}{2}CE$. Perciò il tempo, che impiega l'onda CDE nel percorrere lo spazio EG eguale alla sua larghezza, è uguale a quello, che mette la parte più alta E ad abbassarsi fino in d, e poi a ritornare in E.

III. Che nel tempo, che mette la parte

più alta E a diventare la più baſſa in d; l'onda fa una ondulazione, e un' altra di seguito, mentre la ſteſſa parte da d ritorna in E, ſiccome l'acqua nel ſifone fa una oscillazióne, allorchè la parte più elevata A A (fig. 23.) s' abbaſſa in E E, e un'altra di seguito, allorchè da E E ritorna in A A. Ond' è, che un'onda in una ondulazione percorre una metà della sua larghezza, e l' altra metà nell' altra ondulazione seguente.

Ora il tempo, che impiega la parte più alta E (fig. 24.) a divenire la più baſſa in d, oſſia che impiega l' onda nel fare una ondulazione, ſi può appreſſo a poco conſiderare uguale a quello, che metterebbe nel fare una oscillazione l' acqua nel ſifone bDdE pieno soltanto ſino in Dg, s' eſſa veniſſe elevata in E, dov' è la parte più alta dell' onda, e poscia abbandonata all' azione della sua gravità. Imperocchè da una parte la forza motrice, che fa ascender nell'onda la parte più baſſa D, ſiccome nel ſifone, è uguale al peso della colonna Ed di acqua; e dall' altra l'acqua, che la suddetta forza mette in moto, ha una lunghezza appreſſo a poco eguale a quella dell' acqua nel ſifone bDdE, non apportando la discesa della parte più alta dell'onda all'acqua, che ſtà al di sotto della cavità, agitazione notabile.

Perciò se ſi prenderà un pendolo, che abbia la lunghezza $PA = \frac{Ed + dD}{2}$ (fig. 22.), ovvero, poichè nelle onde, principalmente se

queste son molto larghe, l'altezza cE, a cui sale l'acqua al di su della superficie A B dell' acqua stagnante, è una picciola cosa rispetto alla larghezza delle medesime, e quindi anche la profondità ed, a cui s' abbassa al di sotto della stessa superficie, $= \frac{1}{2} dD = \frac{1}{4} CE$, eguale cioè ad un quarto della larghezza dell'onda, esso farà le sue oscillazioni nello stesso tempo, che l'onda fa le sue ondulazioni (230.). Ciocchè ec.

236. *Coroll.* I. La larghezza di un'onda si dica L. Poichè un pendolo, che abbia la lunghezza $PA = \frac{1}{4}L$, fa le sue oscillazioni nello stesso tempo, che l'onda le sue ondulazioni, sarà il tempo, che mette l'onda nel fare una sua ondulazione, ossia $T = \sqrt{\frac{1}{4}L}$, essendo il tempo, che mette quel pendolo in una sua oscillazione, $= \sqrt{\frac{1}{4}L}$. Per la stessa ragione anche il tempo, che mette un'altra onda in una sua ondulazione, ossia $t = \sqrt{\frac{1}{4}l}$, chiamata l la larghezza di quest' altra onda. Quindi, poichè $T : t = \sqrt{\frac{1}{4}L} : \sqrt{\frac{1}{4}l} = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, debbono essere i tempi, che impiegano le onde nel fare le loro ondulazioni, come le radici delle loro larghezze.

237. *Coroll.* II. Poichè un pendolo, che abbia la lunghezza $PA = 3$ piedi, $8\frac{18}{100}$ linee, fa in Italia una oscillazione in un secondo (233.), se un'onda avrà la larghezza $L = 12$ piedi, 2 pollici, $9\frac{12}{100}$ linee, essa farà nei nostri mari una ondulazione in un secondo, essendo un quarto della larghezza di quest'onda eguale alla larghezza del pendolo suddetto.

PROBLEMA IV.

Costruire un pendolo, che faccia le sue oscillazioni nello stesso tempo, che un' onda percorre la sua larghezza.

238. UN'onda percorre la sua larghezza, allorchè la sua sommità C si trasferisce in E, siccome abbiam già detto; il che si ottiene col mezzo di due ondulazioni immediatamente seguenti, percorrendo l' onda CDE nella prima ondulazione lo spazio C*b*, e nell'altra lo spazio *b*E. Quindi un'onda percorrerà la sua larghezza nel tempo, che un pendolo, che abbia la sua lunghezza eguale ad un quarto della larghezza della stess' onda, fa due oscillazioni, facendo essa in questo tempo due ondulazioni (235.). Ora si concepisca un pendolo quattro volte più lungo del primo. Egli è chiaro, ch'esso non farà, che una sola oscillazione nel tempo, che il primo ne fa due, essendo il numero delle oscillazioni, che fanno in un dato tempo due pendoli simili, in ragione inversa della durata delle loro oscillazioni, ossia delle radici delle loro lunghezze (234.). Perciò, se ad un pendolo si darà la lunghezza AP eguale alla larghezza dell' onda, esso farà una oscillazione nel tempo stesso, che la medesima onda percorrerà la sua larghezza. Ciocchè ec.

239. *Coroll.* I. La larghezza di un' onda si

dica L. Poichè un pendolo, che abbia la lunghezza $AP = L$, fa le sue oscillazioni nello stesso tempo, che l'onda percorre la sua larghezza L, sarà il tempo, che questa mette nel percorrere la sua larghezza, ossia $T = \sqrt{L}$, essendo il tempo, che impiega quel pendolo in una oscillazione $= \sqrt{L}$. Per la stessa ragione anche il tempo, che mette un'altr'onda nel percorrere la sua larghezza l, dev'esser, ossia $t = \sqrt{l}$. Quindi, poichè $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, i tempi, che impiegano le onde nel percorrere le loro larghezze, sono come le radici delle stesse larghezze.

240. *Coroll.* II. Poichè un pendolo, che abbia la lunghezza $AP = 3$ piedi, 8 $\frac{18}{100}$ linee, fa in Italia una oscillazione in un secondo, se vi sarà un'onda della larghezza di 3 piedi, 8 $\frac{18}{100}$ linee, dovrà essa percorrerla in un secondo. Quindi, essendo il moto delle onde equabile (235.), si può stabilire la velocità assoluta v di quell'onda $= 3$ piedi, 8 $\frac{18}{100}$ ad ogni secondo.

241. *Coroll.* III. Essendo nel moto equabile le velocità in ragion composta della diretta degli spazj, e dell'inversa dei tempi, debbon le velocità delle onde essere in ragion composta della diretta delle larghezze, e dell'inversa dei tempi, che impiegano esse nel percorrerlo. Quindi, poichè questi tempi sono come le radici delle larghezze (239.), se si chiameranno V, v le velocità di due onde, e L, l le larghezze delle stesse,

R 4

si avrà $V : v = \frac{L}{\sqrt{L}} : \frac{l}{\sqrt{l}} = \frac{\sqrt{L}.\sqrt{L}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{l}.\sqrt{l}}{\sqrt{l}}$ $= \sqrt{L} : \sqrt{l}$, vale a dire saranno le velocità delle onde proporzionali alle radici delle loro larghezze. Quindi quanto maggiore sarà la larghezza delle onde, altrettanto maggiore dovrà essere lo spazio, che queste descrivono in un dato tempo.

PROBLEMA V.

Data la larghezza di un' onda, ritrovare

I. *Il tempo, che questa impiega nel descrivere la sua larghezza.*

II. *Lo spazio, che la stessa descrive in un dato tempo.*

242. Si chiami L la larghezza dell'onda data, e l quella di un'onda della larghezza di 3 piedi, 8 $\frac{28}{100}$ linee. Poichè questa seconda onda descrive la sua larghezza in un secondo (240.), e poichè i tempi, che impiegano le onde nel descrivere le loro larghezze, sono come le radici delle stesse larghezze (239.), se si farà $\sqrt{l} : \sqrt{L} = 1 : x$, si avrà il tempo x in secondi, che mette la data onda nel descrivere la sua larghezza, $= \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}}$, dove $l = 3$ piedi, 8 $\frac{28}{100}$ linee.

II. Essendo le velocità delle onde come le

radici delle loro larghezze (241.), si troverà la velocità assoluta dell'onda della larghezza L ad ogni secondo, facendo questa proporzione $\sqrt{l}$: $\sqrt{L} = v : x$, dove v è la velocità assoluta dell' onda della larghezza l, ossia dove $v = 3$ piedi, $8\frac{18}{100}$ linee, e sarà $= \frac{v\sqrt{L}}{\sqrt{l}}$. Perciò se questa velocità si moltiplicherà nel numero dei secondi, che contiene il dato tempo t, si avrà lo spazio, che l'onda della larghezza L descrive nel tempo t, $= \frac{tv\sqrt{L}}{\sqrt{l}}$. Ciocchè ec.

243. *Scolio*. Il primo, che diede la spiegazione del movimento delle onde, è stato il gran Newton nei suoi Principj Matematici della Filosofia Naturale. Egli avverte però, che la sua spiegazione non si accosta alla verità, se non prossimamente. Imperocchè si suppone in essa, che le parti dell'acqua nelle onde salgano, e discendano in linee rette nella stessa guisa, che si fa il moto oscillatorio dell'acqua nel sifone, quandochè la loro ascesa, e discesa si fa piuttosto per linee curve, che si approssimano alla circolare.

CAPO X.

Della misura dell' acqua, che ricevono i vasi, mentre vi s' immergono colla bocca all' ingiù.

244. I Vasi, che s' immergono nell'acqua colla bocca all'ingiù, possono essere o voti affatto di aria, o pieni. In questo secondo caso l'aria, che li riempie, può avere una densità o minore, o maggiore, o eguale a quella dell' aria presso la Terra. Secondo la diversità di questi casi diversi sono anche i fenomeni, che ne risultano.

TEOREMA I.

Si prenda un vase, qualunque questo sia, voto di aria, e si sturi la sua bocca sotto la superficie dell' acqua. Dico, che il vase si riempirà esattamente di acqua, se la sua altezza al di su del livello non sarà maggiore di 32 $\frac{2}{3}$ piedi parigini.

245. LA dimostrazione è manifesta, ben vedendo ognuno, che dalla pressione, che sostiene dall' aria esteriore all' ingiù la superficie dell' acqua, che circonda la bocca del vase, deve l' acqua, che vi stà sotto, poichè non viene

premuta all'ingiù per essere il vase voto, salire dentro di questo, finchè la pressione, che fa l'acqua elevata dall'insù all'ingiù, sia in equilibrio colla pressione dell'aria esteriore; il che succede, quando, posta l'altezza del mercurio nel barometro di 28 pollici, l'altezza dell'acqua sollevata al di sù del livello è di $32\frac{2}{3}$ piedi parigini. Quindi, poichè l'altezza del vase non è maggiore di questa, siccome si suppone, sturata la di lui bocca sotto la superficie, dev'esso riempiersi esattamente di acqua. Ciocchè ec.

246. *Coroll.* Adunque se sarà data la capacità del vase, oppure se questa si ricercherà (215.), si avrà la quantità dell'acqua elevata.

TEOREMA II.

Si prenda un vase, qualunque questo sia, pieno soltanto di aria rarefatta, e si sturi la sua bocca sotto la superficie dell'acqua. Dico, che il vase non si riempierà mai, che in parte, di acqua, qualunque sia la sua altezza.

247. Poichè l'aria, che riempie il vase, è rarefatta, siccome si suppone, ossia ha minor densità dell'ordinaria, la pressione, ch'essa in vigore della sua elasticità esercita sull'acqua sottoposta, dev'esser minore di quella, che l'aria esteriore

fa sulla superficie dell' acqua, che circonda la bocca del vase. Però dall'eccesso di questa pressione dev'esser l'acqua obbligata all'ascesa dentro il vase. Ma, poichè a misura, che questa sale, l'aria si condensa nel vase, e quindi cresce la sua elasticità, e perciò anche la sua pressione all'ingiù sull'acqua elevata, non può questa riempiere il vase, se non in parte. Ben si vede, che l'elevazione dell'acqua nel vase allora deve cessare, quando l'elasticità dell'aria rinchiusa insieme colla pressione dell'acqua elevata fa all'ingiù una pressione eguale a quella di $32\frac{2}{3}$ piedi di acqua sotto la stessa base, essendo in questo caso la pressione dell'aria rinchiusa, e dell'acqua elevata insieme in equilibrio colla pressione dell'aria esteriore. Ciocchè ec.

248. *Coroll.* Adunque se dal volume dato, oppure ritrovato del vase si leverà quello, che occupa l'aria rinchiusa, si avrà il volume, e quindi la quantità dell'acqua elevata.

249. *Scolio*. Ma qui è necessario il consultare la nostra Idrostatica, dove parlasi della tromba aspirante, e dell'ascesa dell'acqua per quella, se si vuol ben intendere il bel Problema, che siegue.

PROBLEMA I.

Ritrovare l'altezza, a cui sale l'acqua dentro di una tromba aspirante ad ogni colpo dello stantuffo.

250. SI alzi lo ſtantuffo F (fig. 35. dell'Idroſtatica) dal piano IH, dov'eſſo giace nella sua maſſima depreſſione, fino a TS, dove ſtà la sua maſſima elevazione. L'aria dello spazio ICBH ſi spanderà in vigore della sua elaſticità anche nello spazio ITSH. Quindi, eſſendoſi diminuita l'elaſticità dell'aria nel corpo della tromba, la valvula E, venendo all'insù più premuta dall'elaſticità dell'aria nel tubo AEK di aspirazione, deve aprirſi, e concederle il paſſaggio, finchè ſi riduca ad eguale denſità tanto l'aria di AEK, quanto quella di CTSB; dopo di che la valvula E reſta dal proprio peso chiusa. Quindi anche, scemata eſſendoſi la denſità dell'aria nel tubo di aspirazione, la sezione AK dell'acqua viene dalla gravità dell'aria eſteriore premuta all'insù con maggior forza, che all'ingiù dall'elaſticità dell'aria rinchiusa. Quindi finalmente l'acqua sale per il tubo di aspirazione, finchè il peso dell'acqua sollevata inſieme colla elaſticità dell'aria interna ſia in equilibrio colla preſſione dell'aria eſterna. L'altezza dell'acqua sollevata non ſi scema, allorchè abbaſſato lo ſtantuffo da TS in IH ſi espelle dal corpo della tromba per la valvula F parte dell'aria rinchiusa, reſtando in quel tempo chiusa l'altra valvula E, oſſia tolta la comunicazione del corpo della tromba col tubo di aspirazione.

Si supponga, che nella elevazione dello ſtantuffo da IH in TS l'acqua salga al di su del

suo livello fino in ak, cosicchè l'altezza della sua elevazione sia Aa. Affine di ritrovare quest' altezza si dica R il raggio del corpo della tromba, r il raggio del tubo di aspirazione, a l'altezza IT, per cui sale, e scende lo stantuffo, b l'altezza CI della parte del corpo della tromba posta al di sotto dello stantuffo nella massima depressione, A l'altezza della colonna d'acqua equivalente all'elasticità dell'aria rinchiusa avanti l'elevazione dello stantuffo, x l'altezza Aa ricercata dell' ascendimento dell'acqua nel tubo di aspirazione al primo colpo dello stantuffo, $A - x$ l'altezza della colonna d'acqua equivalente all'elasticità dell'aria rinchiusa dopo l'elevazione dello stantuffo, c finalmente l'altezza AC del tubo di aspirazione al di sopra del livello dell'acqua. Egli è chiaro,

I. Che, posta la ragione della perifería al raggio $= p : 1$, dev'esser il cilindro $IS = \frac{1}{2} pR^2 . a$, il cilindro $CH = \frac{1}{2} pR^2 . b$, il cilindro $AB = \frac{1}{2} pr^2 . c$, il cilindro finalmente $aB = \frac{1}{2} pr^2 . \overline{c - x}$.

II. Che lo spazio, che occupava l'aria nella tromba avanti l'elevazione dello stantuffo, ossia mentre la base di questo si trovava nel piano IH, $= \frac{1}{2} pR^2 . b + \frac{1}{2} pr^2 . c$; e che lo spazio, che occupa l'aria dopo l'elevazione dello stantuffo, ossia mentre la base di questo giace nel piano TS, $= \frac{1}{2} pR^2 . a + \frac{1}{2} pR^2 . b + \frac{1}{2} pr^2 . \overline{c - x} = \frac{1}{2} pR^2 . \overline{a + b} + \frac{1}{2} pr^2 . \overline{c - x}$.

Ora, poichè la elasticità dell'aria è in ragione inversa del suo volume (52.), e poichè la elasticità dell'aria rinchiusa prima della elevazione dello stantuffo $= A$, dopo $= A - x$, egli è chiaro, che deve stare $A : A - x = \frac{1}{2} pR^2 . \overline{a + b} + \frac{1}{2} pr^2 . \overline{c - x} : \frac{1}{2} pR^2 . b + \frac{1}{2} pr^2 . c = R^2 . \overline{a + b} + r^2 . \overline{c - x} : R^2 . b + r^2 . c$. Se si faranno i prodotti dei termini medj, ed estremi fra loro, se si ridurranno a minor espressione, se finalmente si faranno le solite trasposizioni, si avrà quest'equazione del secondo grado $x^2 - Ax - cx - \frac{R^2}{r^2} bx - \frac{R^2}{r^2} ax = - \frac{R^2}{r^2} Aa$. Si faccia $t = \frac{R^2}{r^2}$: fatta la sostituzione, si avrà $x^2 - Ax - cx - btx - atx = - Aat$. Sciogliendo quest'equazione secondo le regole dell'Analisi, si ha $x = \frac{1}{2} \left(A + c \mp t . \overline{b + a} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{ \left((A + c + t . \overline{b + a})^2 - 4 Aat \right) }$ dove, siccome dissi, $t = \frac{R^2}{r^2}$. In quest'equazione per avere la ricercata altezza x bisogna prendere l'inferior segno $-$. Se si prendesse il superiore $+$, si avrebbe l'altezza x maggiore di A; il che sarebbe un assurdo.

Quindi s'intende, come si debba procedere

per ritrovare l'altezza aV, a cui sale l'acqua nel secondo colpo dello stantuffo, quando cioè, dopo di averlo abbassato in IH, si restituisce in TS. Si chiami d l'altezza Aa ritrovata, y l'altezza aV, che si ricerca. Sarà lo spazio ICakBH, che occupa l'aria avanti l'elevazione dello stantuffo $= \frac{1}{3} pR^2 . b + \frac{1}{3} pr^2 \overline{c - d}$; lo spazio poi TCVPBS, che occupa la stess'aria dopo l'elevazione, $= \frac{1}{3} pR^2 . \overline{b + a} + \frac{1}{3} pr^2 . \overline{c - d - y}$. Onde, se si farà $A - d : A - d - y = \frac{1}{3} pR^2 . \overline{b + a} + \frac{1}{3} pr^2 . \overline{c - d - y} : \frac{1}{3} pR^2 . b + \frac{1}{3} pr^2 . \overline{c - d}$, si troverà, fatta l'operazione di sopra, il valore di y, ossia l'altezza aV, a cui l'acqua ascende nel secondo colpo dello stantuffo. Si ponga l'altezza $d + y$, ossia l'altezza totale AV dell'ascendimento dell'acqua nei primi due colpi dello stantuffo $= e$: fatta la stessa operazione di sopra si troverà l'altezza, a cui deve portarsi l'acqua nel terzo colpo dello stantuffo, e così di seguito. Ciocchè ec.

251. *Coroll.* Quindi anche si trova la quantità dell'acqua, che ad ogni colpo dello stantuffo si solleva per la tromba. Essendo l'altezza, a cui sale l'acqua per il tubo di aspirazione nel 1.° colpo di stantuffo $= Aa$, nel 2.° $= aV$ ec., se si chiamerà c l'area circolare di una sezione del tubo di aspirazione, e g il peso di un piede cubico di acqua espresso in libb. parig., si troverà, che la quantità dell'acqua, che si innalza per il

tubo

tubo di aspirazione al 1.° colpo di ſtantuffo $= c . Aa . g$, al 2.° $= c . aV . g$ libb. parig., purchè ſi esprimano in piedi parig. anche le altre quantità. Se l'acqua saliſſe soltanto per il corpo della tromba, allora c dovrebbe ſignificare l'area di una sezione di quello. Ma se l'acqua saliſſe parte per il tubo di aspirazione, e parte per il corpo della tromba, allora, chiamati C l'area di una sezione di queſto, m, n le parti dell'altezza, che l'acqua sollevata con quel colpo di ſtantuffo occupa nel tubo di aspirazione, e nel corpo della tromba, ſi troverebbe la quantità di queſt'acqua $= cgm + Cgn$ libb. parig.

TEOREMA III.

Si prenda un vase CBED (fig. 25.), *qualunque queſto ſia, pieno di aria comune, e ſi applichi la sua bocca aperta* CD *alla superficie dell'acqua in modo, che il vase ſia a queſta perpendicolare. Dico*

I. *Che, finchè la bocca* CD *tocca soltanto la superficie dell'acqua, non può queſta elevarſi dentro il vase.*

II. *Che a misura, che il vase s'immergerà nell'acqua perpendicolarmente sempre alla superficie, l'acqua sempre più ſi solleverà dentro di eſſo purchè l'aria rinchiusa ſia ulteriormente compreſſibile.*

III. *Che se dentro dell'acqua ſi fermerà il vase,*

qualunque ſia il luogo dell'immerſione, sarà nella ſteſſa ipoteſi la preſſione, ch' eserciterà all' ingiù contro la superficie C D *della bocca del vase l'elaſticità dell'aria rinchiusa inſieme coll'acqua elevata, eguale alla preſſione, ch' esercita all' insù contro la ſteſſa l'aria eſteriore, e l' acqua ambiente.*

IV. *Che il vase non ſi riempirà mai intieramente di acqua, comunque grande ſi ponga la profondità della sua immerſione.*

252. QUando l' apertura C D tocca la superficie dell' acqua, allora sì la preſſione, che fa all' ingiù in vigore della sua elaſticità l' aria rinchiusa, come anche la preſſione, che fa all' insù contro la ſteſſa superficie C D l' aria eſteriore in virtù della sua gravità, sono eguali fra loro, essendo in queſto caso tanto l' una, quanto l' altra eguale al peso di una colonna d' acqua, la quale abbia per base la superficie C D, e per altezza 32 $\frac{2}{3}$ piedi parigini. Però in queſto primo caso l' acqua non può elevarſi dentro il vase al di su del suo livello.

Si ponga ora il vase immerso alla profondità A C. In queſt'altro caso alla preſſione dell' aria eſterna ſi aggiunge la preſſione dell' acqua ambiente, coſicchè la preſſione totale, che la superficie C D soſtiene all'insù dall'aria eſterna, e dall' acqua aſſieme, è eguale al peso di una colonna

d'acqua, la quale abbia per base la superficie CD, e per altezza $32 \frac{2}{3}$ piedi + AC. Quindi, poichè la preſſione, che l'aria rinchiusa fa all'ingiù sulla superficie CD in vigore della sua elaſticità, è uguale a quella, che l'aria eſterna in vigore del suo peso fa all'insù sulla ſteſſa, eſſa viene spinta all'insù dall'acqua ambiente con forza eguale al peso della colonna di acqua compresa sotto CD, e sotto AC. Quindi anche la superficie CD d'acqua deve elevarſi per il vase CBED, riducendo a minor volume l'aria rinchiusa. Ma, poichè l'aria comprimendoſi diventa più elaſtica, deve allora soltanto ceſſare l'elevazione dell'acqua nel vase, quando la elaſticità dell'aria compreſſa inſieme colla preſſione dell'acqua elevata è uguale alla preſſione dell'aria eſterna, e dell'acqua ambiente, eſſendo in queſto caso la preſſione, che soſtiene all'ingiù la superficie CD della bocca del vase, eguale a quella, che la ſteſſa soſtiene all'insù; il che succede, allorchè il vase immerso ſi ferma, mentre l'aria rinchiusa è ulteriormente compreſſibile.

Se la profondità dell'immerſione del vase diventa maggiore, la superficie CD viene allora all'insù più premuta dall'aria eſteriore, e dall'acqua aſſieme, che all'ingiù dall'aria, e dall'acqua rinchiusa. Perciò dev'eſſa di nuovo sollevarſi per il vase, nè può ceſſare l'elevazione, se non quando la preſſione dell'aria, e dell'acqua rinchiusa è uguale a quella dell'aria, e dell'

acqua esteriore. Questo raziocinio ha luogo, finchè l'aria rinchiusa è ulteriormente compressibile. Ma se questa cessa di esser tale, allora l'acqua non può più elevarsi dentro il vase, comunque cresca la profondità dell'immersione, opponendosi in quel caso all'elevazione dell'acqua l'impenetrabilità della stess' aria. Ora, qualunque figura si conceda alle particelle dell'aria, ben si vede, che, allorchè le loro molle sono state compresse fino al loro totale avvicinamento, la loro mutua impenetrabilità non può più permettere la compressione. Ciocchè ec.

253. *Scolio*. Qual sia il punto, in cui l'aria cessa di esser compressibile, non si può stabilire, attesa la nostra ignoranza sì intorno alla figura delle particelle dell'aria, come anche intorno alla loro mutua disposizione. Se il vase s'immerge nell'acqua obbliquamente, allora, poichè sfugge l'aria, ch'esso contiene, si riempie intieramente.

254. *Coroll.* Quindi s'impara, perchè non si empie un vase, quando tuffasi colla bocca all' ingiù perpendicolarmente? Perchè quando l'imbuto chiude con troppa esattezza il collo di una bottiglia, non vi si può introdurre il vino? Perchè per riempiere di acqua alcune caraffe di collo sottile bisogna scaldarle prima col fuoco (134.)?

PROBLEMA II.

Data la profondità della verticale immersione di un dato vase prismatico CBED *pieno di aria comune colla bocca aperta* CD *all'ingiù nell'acqua, ritrovare il volume dell'acqua elevata dentro di esso.*

255. Si supponga, che il vase CBED sia immerso alla profondità AC, e che l'acqua siasi sollevata dentro di esso all'altezza C*m*, cosicchè C*mm*D sia il volume occupato dall'acqua, *m*BE*m* il volume occupato dall'aria compressa nel vase. Si cerchi

I. La pressione, che dall'aria esteriore, e dall'acqua ambiente sostiene all'insù la superficie CD dell'apertura del vase. Egli è chiaro, che, chiamato V il volume di una colonna d'acqua della base $=$ CD, e dell'altezza $= 32\frac{2}{3}$ piedi parigini espresso in piedi cubici, e g il peso di un piede cubico di acqua espresso in libbre parigine, dev'esser la pressione, che dall'aria esteriore sostiene all'insù la superficie CD, $= Vg$. Similmente, chiamato v il volume di una colonna d'acqua della base $=$ CD, e dell'altezza $=$ CA distanza della superficie CD dal livello dell'acqua ambiente, dev'esser la pressione, che dall'acqua sostiene all'insù la stessa superficie CD, $= vg$. Perciò la totale pressione, che dall'aria esteriore,

e dall'acqua ambiente assieme sostiene all'insù la superficie CD dell'apertura del vase, $= Vg + vg$, libb. parigine.

II. La pressione, che soffre all'ingiù la stessa superficie CD dall'elasticità dell'aria rinchiusa, e dal peso dell'acqua elevata. Si dica m il volume interno del vase BCDE, e x la parte ignota C$m$$m$D di questo volume occupata dall'acqua: sarà $m - x$ il volume, che occupa nel vase l'aria compressa dopo la elevazione dell'acqua. Poichè la forza elastica dell'aria è in ragione inversa degli spazj, che occupa, ben si vede, che, essendo la forza elastica dell'aria rinchiusa nello spazio m contro la superficie CD $=$ Vg, dev'esser la forza elastica della stess'aria rinchiusa nello spazio $m - x$ contro la medesima $= \frac{Vmg}{m - x}$. Parimente essendo lo spazio, che occupa l'acqua dentro il vase $= x$, dev'esser il peso di questa colonna d'acqua $= xg$. Però la totale pressione, che sostiene all'ingiù la superficie CD dall'elasticità dell'aria compressa, e dall'acqua elevata assieme, $= \frac{Vmg}{m - x} + xg$ libb. parigine.

Ma, poichè quest'ultima pressione dev'esser eguale alla prima (252.), bisogna, che sia $\frac{Vmg}{m - x}$ $+ xg = Vg + vg$, ossia $\frac{Vm}{m - x} + x = V + v$.

Quindi si avrà $x^2 - x . \overline{V + v + m} = - vm$, ossia, facendo $V + v + m = a$, si avrà $x^2 - ax = - vm$, e quindi $x = \frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4vm)}$, dove, come dissi, $a = V + v + m$. Anche in questa equazione per avere il volume x dell'acqua elevata nel vase bisogna prendere l'inferior segno $-$. Se si prendesse il superiore $+$, si troverebbe il volume x maggiore di quello del vase; il che è un assurdo. Ciocchè ec.

256. *Coroll.* I. Adunque se dal volume del vase si leverà il volume ritrovato dell'acqua elevata, si avrà anche il volume dell'aria compressa.

257. *Coroll.* II. Se il volume ritrovato dell' acqua, o dell' aria si dividerà per la base del vase, si avrà l'altezza dell' acqua, oppure dell' aria compressa dentro il vase, essendo le altezze dei corpi prismatici eguali ai quoti, che ne risultano, dividendo i loro volumi per le basi.

PROBLEMA III.

Data la lunghezza di un tubo chiuso nell'una, e aperto nell'altra estremità, stato verticalmente calato nel fondo del mare, e data la parte di questa lunghezza occupata dall' acqua sollevatavi dentro, determinare la profondità del mare.

258. SI ponga l'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi parig. $= A$, la lunghezza del tubo $= L$, l'al-

tezza dell'acqua sollevata dentro di questo $=$ a, la base dello stesso $= b$, la profondità finalmente ricercata del mare $= y$. Messi nell' equazione $\frac{Vm}{m-x} + x = V + v$ (255.), dove $V = Ab$, $v = by$, $m = Lb$, $x = ab$, messi, dico, i valori corrispondenti, si avrà $\frac{Ab.Lb}{Lb+ab}$ $+ ab = Ab + by$. Onde $y = a + \frac{Aa}{L-a}$. Ciocchè ec.

259. *Scolio*. Sulla dottrina di questo Problema si fonda lo strumento, che si può chiamare *il misuratore della profondità del mare*, stato ideato dal Sig. Halles in occasione, che ha voluto accertarsi della grande elasticità dell'aria prodotta dai vegetabili, e poscia perfezionato, e messo in pratica dal Sig. Desaguliers alla presenza della Società Reale di Londra. Esso consiste in una bottiglia forata nella sua parte superiore in più luoghi per ammettere da ogni dove nel tempo della sua immersione l'acqua, e in un tubo sigillato ermeticamente nella cima, e aperto nell'estremità inferiore, rinchiusovi dentro immobilmente in modo, che sia nella sua parte superiore cementato al collo di ottone della bottiglia, e che abbia il suo orifizio immerso nel mercurio, che dentro di essa si ritrova con al di sopra un tenue strato di mele, oppure di

triaca. Al collo della bottiglia si attacca fortemente un corpo molto leggiero, per esempio una vescica di porco, e al fondo della stessa un corpo molto pesante. Quest'ultimo è attaccato con tale artifizio, che si distacca, allorchè tocca il fondo del mare. La macchina abbandonata a se stessa discende verticalmente fino al fondo del mare. L'acqua, entrata per li fori della bottiglia, poichè comunica liberamente coll'esteriore, preme il sottoposto mercurio con forza proporzionata alla sua profondità, e obbliga il mercurio a salire per il tubo, dove condensa l'aria rinchiusa, a misura che cresce la profondità della discesa della macchina nell'acqua, restando nello stesso tempo segnata l'altezza della di lui elevazione dal tenue strato di mele, o di triaca. Tostochè il peso urta nel fondo del mare, esso si distacca dalla macchina, e allora resasi questa specificamente più leggiera sale per l'acqua, e si porta a galla. Ora noto lo spazio, in cui si è ristretta dentro il tubo l'aria compressa per via di quello strumento, si ritrova facilmente la profondità del mare (258.). Questa macchina può essere di gran vantaggio, allorchè si tratta della misura delle grandi profondità, dove lo scandaglio non ci può esser utile.

PROBLEMA IV.

Data la ragione della densità dell' aria constipata dentro di un vase qualunque alla densità dell' aria esterna ritrovare la profondità, in cui sturandosi quel vase, niente di acqua vi possa entrare, e niente di aria uscire.

260. Si supponga, che la densità dell'aria rinchiusa dentro il vase CBED stia alla densità ordinaria della stessa $= m : 1$. Egli è chiaro, che, affinchè, sturandosi il vase CBED dentro dell'acqua, niente di questa possa entrare, e niente di aria uscire, bisogna, che la profondità dell' immersione verticale sia tale, che la pressione, che la superficie CD dell'apertura del vase sostiene all' insù dall'aria dell' atmosfera, e dell' acqua assieme, sia eguale a quella, che la stessa sostiene all' ingiù dall' elasticità dell'aria rinchiusa. Ora si ponga A l'altezza di $32\frac{2}{7}$ piedi, x la profondità ricercata, b la base CD del vase, g finalmente il peso di un piede cubico parigino di acqua espresso in libbre parigine. Sarà la pressione, che dall'aria dell' atmosfera, e dell' acqua assieme sostiene all'insù la superficie CD, $= Abg + xbg$. Parimente sarà la pressione, che dall'elasticità dell' aria rinchiusa sostiene all' ingiù la stessa superficie CD, $= mAbg$. Adunque, poichè dev'essere $Abg + xbg = mAbg$,

perchè, sturandosi nella ricercata profondità il vase, niente di acqua ammetta, niente di aria perda, deve anche essere $x = \frac{mAbg - Abg}{bg}$ $= mA - A = \overline{m - 1} \cdot A$. Ciocchè ec.

261. *Coroll.* Poichè la superficie CD dell' apertura del vase resta immobile allora soltanto, quando $x = \overline{m - 1} \cdot A$, ben si vede, che, se x diventerà minore di $\overline{m - 1} \cdot A$, la superficie CD verrà dalla elasticità dell' aria rinchiusa spinta abbasso, cacciando in dietro l'acqua sottoposta: se poi maggiore, verrà allora spinta all' insù dall'acqua sottoposta, riducendo a minor volume l'aria rinchiusa, finchè l' elasticità di questa insieme colla pressione dell'acqua elevata per il vase sia in equilibrio colla pressione dell' aria, e dell'acqua esteriore assieme.

262. *Scolio.* Sì in questo, come negli altri due precedenti Problemi si suppone, che nell' atto dell'immersione del vase l'acqua abbia la stessa temperie, che l'aria rinchiusa. Se fosse più fredda, la elevazione dell'acqua dentro il vase sarebbe maggiore della calcolata, scemandosi dal freddo la elasticità dell'aria; minore poi, s'essa fosse più calda, accrescendosi dal caldo la elasticità dell'aria. Nel far poi il calcolo della elevazione dell'acqua oltre la considerazione del caldo, e del freddo bisogna aver riguardo all' attuale pressione dell'atmosfera; nè si deve om-

mettere anche la considerazione del peso della stess' acqua, non avendo tutte le acque, siccome ciascun sa, la stessa gravità specifica. Per esempio, allorchè il mercurio ha nel barometro l'altezza di 28 pollici, la pressione dell'aria atmosferica equivale, posta la stessa base, al peso di una colonna d'acqua di $32 + \frac{2}{3}$ piedi parigini. Ma l'acqua di questa colonna è la comune di pioggia, la gravità specifica della quale stà alla gravità specifica dell'acqua del mare secondo il Sig. Musschembroek $= 1000 : 1030$. Però, quando si tratta dell'immersione di un vase nell' acqua del mare, volendo operare con esattezza si deve stabilire l'altezza della suddetta colonna $= 31 \frac{1}{4}$ piedi in circa, e il peso di un piede cubico della stessa $= 72 \frac{1}{10}$ libb. parigine. Quindi si vede, come si debba procedere per avere con esattezza il risultato del Problema III. Si ponga $A = 31 \frac{3}{4}$ piedi $= 381$ pollici, $L = 36$ pollici, a finalmente $= 35 \frac{1}{2}$ pollici, cosicchè l'aria nel tubo calato verticalmente al fondo del mare siasi ristretta nello spazio di un mezzo pollice d'altezza. Si troverà la profondità y del mare in quel luogo $= 2257$ piedi, $2 \frac{1}{2}$ pollici parigini.

APPENDICE.

Dell' arte di andar sott' acqua.

263. La dottrina precedente è il fondamento della *Campana Urinatoria*. *Palombari*, che dai Latini venivan detti *Urinatores*, si chiamano quei, che discendono nell'acqua a grandi profondità, affine principalmente di fare la pesca delle merci cadute, delle perle, dei coralli, e delle spugne. Dissi *principalmente*, andando essi alcune volte sott'acqua o per il racconciamento di una nave, o per fare naufragare un vascello nemico, o finalmente per fare delle osservazioni naturali sul fondo del mare. I palombari si chiamano in marinerìa *Marangoni*, e deriva questo nome da quel di un certo uccello detto latinamente *mergus*, che si tuffa, e preda sott'acqua. Due grandi difficoltà incontrano essi, allorchè discendono nell'acqua a grandi profondità, la prima delle quali proviene dall'aria necessaria al mantenimento della respirazione, e quindi della respirazione.

264. Si sa, che l'aria col mezzo della respirazione si gausta in modo, che diventa col tempo affatto irrespirabile, ossia affatto inetta alla respirazione. Per accertarsi di questa verità si prenda un picciol vase di collo stretto, e preso poscia per la bocca il collo, senzachè vi

entri per esso nuov' aria, si tengan ben chiuse le narici. Si osserverà, facendone la sperienza, che non si può senza pericolo di rimanere soffogato tenere, se non per brevissimo tempo, quel vase così applicato alla bocca, restando sì presto viziata dalla respirazione l'aria contenuta. Ma donde avviene, che l'aria mediante la respirazione si vizia in modo di divenire affatto inetta alla conservazione della vita?

265. La Fisica moderna dopo le belle sperienze di Priestley, di Scheele, di Lavoisier, di Volta e di altri valenti Uomini c' insegna,

I. Che l'aria della nostra Atmosfera non è altro, che un composto di due fluidi aeriformi principalmente, ossia gas differentissimi fra loro, e mescolati assieme, uno respirabile, che si chiama *gas ossigene*, l'altro affatto *irrespirabile*, che si nomina *gas azoto*. Ond'è, che se all'aria dell'atmosfera rinchiusa sotto di un recipiente si leva il gas ossigene, e vi s'immerge poscia un animale, vi resta subito soffogato, come se posto fosse in un vase privo affatto di aria. Il primo ha per base un principio acidifico, senza del quale non vi è acido nella natura; e che perciò con greco vocabolo si appella *ossigene*, ossia generatore degli acidi: l'altro un principio, che, poichè priva di vita, chi solo lo respira, si chiama con vocabolo parimente greco *azoto*, ossia privativo di vita. Ambedue le basi sono intimamente combinate col *calorico*, ossia colla materia

del calore, che loro dà la volatilità, la elasticità ec., ossia in una parola la forma di gas, con questa differenza però che la materia del calore, ch' entra nella composizione del gas ossigene, è molto più copiosa di quella, ch' entra nella composizione del gas azoto.

II. Che il gas ossigene, che si trova nell' aria, non è che un quarto in circa di questo, essendo il resto gas azoto con un po' di gas acido-carbonico egualmente irrespirabile. Ond'è, che, mescolando assieme un quarto di gas ossigene, e tre di azoto, si ottiene un' aria egualmente respirabile, che l' aria comune dell' atmosfera: se si accresce, o si scema la dose del gas ossigene nella mistura, si forma un' aria più, o men buona della comune in ordine alla respirazione.

III. Che il gas acido-carbonico, che secondo la vecchia nomenclatura si chiama *aria fissa*, oltre il calorico, che gli dà la forma di gas, e gli serve di principio, ha per base l' ossigene, che tiene del *carbo* in dissoluzione, il quale non è altro, che il carbone nel suo stato di purità. Quest' acido risulta dalla combinazione di circa 72 parti di ossigene, e di 28 di carbo giusta le sperienze del Sig. Lavoisier. Per portar l'acido-carbonico allo stato di gas si ricerca minor calorico, che per portar allo stesso stato l' ossigene. Però si sprigiona del calorico ogni volta, che il gas ossigene si converte in gas acido-car-

bonico, ficcome succede nella combustione, e respirazione.

IV. Che in fine il gas idrogene, ch' è tanto noto sotto il nome vecchio di *aria infiammabile*, oltre il principio del calorico, da cui riceve la sua forma di gas, ha per base una sostanza fino ad ora ignota, alla quale si è dato il nome *d' idrogene*, ossia *generatrice* dell' acqua. Ma perchè? Perchè la base di questo gas combinata colla base del gas ossigene, ossia perchè l' idrogene combinato coll' ossigene produce l' acqua, non essendo questa una sostanza semplice, siccome credevasi una volta; ma bensì un composto di 17 parti di ossigene, e di 3 d' idrogene misurati in peso.

266. L' esperienza prova con evidenza, che l' ossigene ad un certo grado di temperatura ha maggiore affinità col carbo, ed idrogene, che col calorico. Da ciò che ne siegue? Il gas ossigene dell' aria atmosferica, il quale, siccome abbiam detto, è la sola parte respirabile della stessa, nella espirazione al contatto del caldo sangue, che passa per li polmoni, si discompone ne' suoi principj costitutivi. Una parte del di lui ossigene con parte del calorico si combina col carbo dello stesso sangue, e quindi ne risulta il gas acido-carbonico, che poscia nella espirazione si espelle insieme al gas azoto dell' aria inspirata, il quale nella respirazione soffre nissuna alterazione. L' altra parte dell' ossigene si combina soltanto

tanto coll' idrogene del sangue, e forma dell'acqua. Ond'è, che se, posto un animal vivo sotto un recipiente pieno di aria atmosferica, si esamina questa dopo la di lui morte, vi si osserva, che il gas ossigene dell'aria ha sofferto tutta l'alterazione, e nissuna il gas azoto: che dalla combinazione di una parte del di lui ossigene col carbo del sangue dell'animale si è formato del gas acido-carbonico:. che finalmente dalla combinazione dell'altra parte dello stesso coll' idrogene del medesimo sangue è nata dell'acqua. Il calorico, che depone il gas ossigene nelle sue trasformazioni, si comunica al sangue, e si distribuisce con questo mediante la circolazione in tutte le parti del corpo animale, e serve a riparare la perdita continua di quello, che soffriamo per parte dell'atmosfera, e dei corpi, che ci circondano. Ora s' intende

I. L'effetto della respirazione, il qual consiste nel togliere al sangue, mentre passa per li polmoni una parte del di lui carbo, ed idrogene, e nel deporvi in loro luogo il calorico, che serve al mantenimento del calore vitale del nostro corpo.

II. Donde avviene, che l'aria atmosferica dopo di aver servito per un certo numero di volte alla respirazione non è più atta allo stesso uffizio. Essa ha perduto nella respirazione il suo gas ossigene, che è l'unico pascolo di questa, essendosi quel gas cangiato mediante la suddetta

operazione parte nel gas acido-carbonico egualmente irrespirabile, che il gas azoto, e parte in acqua.

III. La ragione finalmente, per la quale gli altri gas sono inetti alla respirazione. Le basi di questi non avendo una sì grande affinità col carbo, e coll' idrogene, non possono con queste materie combinarsi, e quindi nè anche liberare il sangue dall' eccesso delle stesse, nè mantenere il calor vitale del corpo; le quali due funzioni sono egualmente necessarie alla conservazione della vita.

267. Ma quanto di aria comune è necessario al Marangone, perchè possa viver sott'acqua senza pericolo di restar soffogato? Dalle sperienze, che fece il Sig. Lavoisier, ed alle quali benchè penose, ed anche pericolose si sottomise il Sig. Seguin, risulta, che il consumo di gas ossigene, che fa un uomo, mentre digiuno si trova in uno stato di riposo, e in una temperatura di 26 gradi del termometro di Reaumur, è = 1210 pollici cubici per ora: che questo consumo cresce pel freddo; cosicchè lo stesso uomo egualmente digiuno, e nello stato di riposo, ma in una temperatura di soli 12 gradi, fa un consumo di gas ossigene = 1344 poll. cubici: che cresce anche nel tempo della digestione, essendosi innalzato in quel tempo fino a 1800, 1900 pollici. Tutte queste proporzioni s'accrescon molto mediante il moto, e l'esercizio. Avendo il Sig. Seguin innalzato un peso di 15

libbre ad un'altezza di 613 piedi nel tempo di un quarto d'ora, il consumo del gas ossigene, ch'egli fece allora, si trovò = 800, ossia = 3200 pollici cubici per ora. Lo stesso esercizio fatto nel tempo della digestione ha portato il consumo a 4600 pollici. Egli è chiaro, che la quantità consumata del gas ossigene deve variare anche notabilmente secondo l'età delle persone sottoposte alle sperienze, secondo lo stato della loro salute, e robustezza, secondo finalmente la loro maggiore, o minore abitudine alle fatiche penose. Quantunque la quantità del gas ossigene, che consumano gli uomini nella respirazione, non sia in tutti la stessa, si può supporre, che la quantità dello stesso, che consuma un Marangone al fondo del mare in un'ora, sia 1728 pollici cubici, ossia di un piede cubico, principalmente se si riflette al moto, che ivi fa per la pesca delle merci sommerse, e al freddo, che ivi patisce. Quindi, poichè il gas ossigene costituisce una sola quarta parte del volume dell'aria atmosferica, siccome abbiam detto, affinchè il Marangone possa vivere sott'acqua senza pericolo di restar soffogato, gli abbisognano quattro piedi cubici di aria comune per ora.

268. Se la stessa quantità di gas ossigene si considererà come la media, che consuma un uomo in un'ora, si troverà, fatto il calcolo, che un uomo in un giorno col mezzo della sua respirazione forma 2 libbre, 5 once, 4 grossi di

acido-carbonico, e 10 once, 5 grossi, 51 grani di acqua, e che quindi la respirazione leva al suo sangue in un giorno 10 once, 4 grossi di carbo, e 1 oncia, 5 grossi, 51 grani d'idrogene. Ora questa quantità di carbo, ed idrogene, che perde in un giorno l'uomo mediante la sua respirazione, lo condurrebbe necessariamente alla morte, se per la via della digestione non venisse riparata dall'altrá, che v'introducono i cibi animali, o vegetabili. Perciò, poichè l'uomo operoso consuma, *caeteris paribus*, nella sua respirazione maggior copia di gas ossigene, anche per questa ragione ha bisogno di maggior cibo, che il ricco ozioso.

269. L'altra difficoltà, che esperimentano i Marangoni nelle loro immersioni, proviene dalla pressione dell'acqua. Gli uomini, finchè vivono sulla superficie della Terra, patiscon dall'aria, in cui sono immersi, una pressione eguale al peso di una colonna d'acqua, la quale abbia per base la superficie del loro corpo, e per altezza l'altezza di $32 + \frac{2}{3}$ piedi parigini, ossia posta la superficie del corpo umano di 15 piedi quadrati, $=$ 34300 libbre parigine. Ma se essi discendono dentro l'acqua, alla pressione dell'aria si aggiunge anche quella dell'acqua ambiente, cosicchè alla profondità di $32 + \frac{2}{3}$, di $65 + \frac{1}{3}$, di 98 ec. piedi parig., la pressione, che sopportano dall'aria dell'atmosfera, e dell'acqua assieme, è doppia, tripla, quadrupla ec. di quella della sol'aria, ossia $=$

68600, 102900, 137200 ec. libb. parigine, purchè la loro discesa sia nell'acqua dolce. Imperocchè se fosse nella salsa del mare, essendo questa specificamente più grave dell'altra, la pressione sarebbe maggiore.

270. Quando l'aria, che hanno in corpo quei, che trovansi nell'acqua dolce immersi alle suddette profondità, è due, tre, quattro ec. volte più densa dell'ordinaria, non possono essi restare al di dentro compressi dalla pressione, ch'esteriormente provano, essendo interiormente sostenuti dall'eguale, e contraria pressione, che fa l'aria rinchiusa in virtù della sua elasticità, quantunque anche in questo caso, se la profondità della discesa è molto grande, i Marangoni patiscono, siccome abbiam già insegnato nella nostra Idrostatica (304.). Ma se i Marangoni, mentre stanno sott'acqua a grandi profondità, non hanno dentro di loro stessi, che l'aria della densità ordinaria, poichè questa non può premere al di fuori mediante la sua elasticità le parti del loro corpo con tanta forza, con quanta le stesse vengono al di dentro premute dall'aria esterna, e dall'acqua assieme, allora i loro corpi vengono dalla pressione esteriore al di dentro talmente compressi, che, quando la profondità della loro immersione è molto grande, resta non solamente impedita, ma eziandio tolta affatto la respirazione, e la circolazione del sangue insieme colle altre funzioni vitali.

271. Per accertarsi di questa verità, della quale un Idrostatico non può dubitare, giacchè si sa, che, se la profondità dell'immersione è di soli $32 + \frac{2}{3}$ piedi parigini, la compressione, che dall'acqua sostiene al di dentro la superficie del corpo umano, è di 34300 libbre parigine, per accertarsi, dico, di questa verità basta fare l'esperienza ordinaria dei Marinari. Si cali col mezzo di una corda ad una profondità molto grande una bottiglia piena soltanto di aria comune, e ben sigillata. Si vedrà, estratta la bottiglia, il sughero forzato dentro di questa dalla pressione esterna dell'acqua. Può anche succedere, che dalla stessa pressione resti rotta la bottiglia, se questa è piana in qualche parte, e se il suo vetro non è molto grosso. Ma di questa verità si vedranno in seguito degli esempj funesti.

272. Vediamo ora i ripieghi stati ideati, e messi in pratica per superare sì la difficoltà, che proviene dal difetto dell'aria respirabile, come anche quella, che nasce dalla pressione dell'acqua, Il primo ripiego ritrovato, e messo in uso anticamente consisteva nel portare in bocca una spugna intinta nell'olio. Si sa, che la spugna racchiude dentro di se moltissimi pori pieni di aria, e che l'olio penetra in questi con difficoltà, e impedisce all'acqua l'entrarvi, e il discacciarne l'aria. Il Marangone sotto l'acqua, comprimendo la spugna, obbliga l'aria a sortirne, e fa uso di questa per respirare. Di questo metodo anche

oggidì si fa uso dai Marangoni nel Mediterraneo, quand'essi fan la pesca delle spugne. Ma per la poca quantità d'aria, che contiene dentro di se una spugna, non può il Marangone stare sott' acqua, se non pochissimo tempo, ancorchè seco portasse più spugne intinte nell'olio. Infatti il Sig. Halley ci accerta, che un Marangone nudo, e senza una spugna non può restare più di due minuti sott'acqua senza restar soffogato, e poco più con una spugna, ed assai meno ancora, se non è esercitato da lunga pratica, cominciando le persone ordinarie a soffogarsi in mezzo minuto in circa. Oltre di che, se la profondità della discesa è grande, poichè il Marangone non ha dentro di se che l'aria d'ordinaria densità, non può a meno di non restare gravemente incomodato dalla pressione dell'acqua (271.). La pressione dell'acqua su i vasi sanguigni fa in questo caso uscire sangue dagli occhi, e bene spesso produce degli sputi di sangue.

273. Dopo l'uso delle spugne si è praticato di rinchiudere il Marangone entro una specie di armatura legata strettamente con dei corami alle giunture in maniera, che il petto, e la faccia rimanessero libero dal contatto, e dalla pressione dell'acqua, e di mandargli col mezzo di due tubi, che partivano dalla superficie, successivamente nuov'aria, venendo questa cacciata giù a forza in uno de'tubi con mantici, mentre ritorna via per l'altro la guasta. Ma questo nuovo ri-

piego non può servire, ſiccom' è ſtato sperimentato, se non per li baſſi fondi, che non eccedono 13 piedi ingleſi in circa. Qualora la profondità dell'immerſione è maggiore, eſſo è affatto impraticabile, quantunque i tubi, e l'armatura con esattezza adempiano il loro uffizio. In queſto caso l'acqua, mediante la sua preſſione, ſtringe talmente le parti nude del Marangone, che v' impedisce la circolazione del sangue. Nè ſi rimedia a queſt' incomodo, coprendo di cuojo fleſſibile le di lui nude membra. „ Non è gran tempo, dice il Sig. Martino Clare nella sua Opera sul *Movimento dei fluidi*, che un Marangone famoso alla profondità di tredici fathom di acqua, avendo il tronco del suo corpo difeso dalla consueta armatura, soffrì tal serratura nelle braccia, perchè solo veſtite di cuojo, che cessò in eſſe quaſi affatto la circolazione, onde il sangue ſi fece ſtrada per gli occhi, naso, ed orecchi dalla gran preſſione superincumbente, che quaſi avea abolita la cavità dei vaſi sanguigni ad eſſa espoſti. Ei fu malato per sei settimane dallo sconcerto, che subì la di lui Macchina in queſto sperimento. E benchè a pochiſſima diſtanza vedeſſe il gruppo di Moneta, per cui ſi era gettato, non gli fu poſſibile di arrivarla; e il suo compagno, che ardì di avanzarſi un poco più, era quaſi spirante, quando venne a galla, e di fatti morì tre giorni dopo ". A ciò ſi aggiunga il pericolo, a cui trovaſi espoſto il Marangone, di reſtare, non oſtante la

sua armatura, affogato dall'acqua. Imperocchè, quando la sua discesa è di molta considerazione, l'acqua allora preme sì fortemente su tutte le giunture dell'armatura, le quali non son fatte, che di cuojo, che, se v'incontra il minimo difetto in alcuna, s'insinua con violenza, e riempie la Macchina ad un tratto con gran rischio della vita del Marangone, che, poichè stà da basso dentro la sua armatura, può restare affogato, prima che possa esser tirato su alla superficie della stessa. Finalmente il Marangone rinchiuso dentro di una sì pesante custodia, qual dev'esser questa, non può esser, che imbarazzato, e quindi disadatto alla ricuperazione delle merci perdute nel naufragio.

274. Affine pertanto di schivare tutti questi inconvenienti, e di render più facile, e sicura la pesca delle perle, dei coralli, e delle merci naufragate fu inventata con gran vantaggio (fig. 26.) dell'umana Società la *Campana urinatoria* C, dentro la quale sedendo il Marangone vien calato ad una ragionevole profondità con sicurezza, e può starsene sott'acqua per un tempo anche notabile, se la Macchina è grande. Essa è di legno foderato esteriormente di piombo: ha vantaggiosamente la figura di una campana, ossia di un cono cavo troncato, chiuso nella sua picciola base superiore, e aperto nella sua maggior base inferiore: ha nel suo interno un sedile all'intorno, dove siedono i Marangoni destinati

alla pesca: ha finalmente nel giro eſterno del suo bordo attaccati dei peſi diſpoſti in maniera di farla calare colla bocca all'ingiù in una poſizione perpendicolare alla superficie dell'acqua. Si cala da una nave per mezzo di un'antenna, che sporga sopra il luogo del naufragio, ad oggetto che i Marangoni cogli ſtrumenti, che seco portano, ſieno in ſtato di spezzare il guscio della nave perduta, e di legare coi canapi i cannoni, e le caſſe, e le altre mercanzie, che meritano d'eſſere eſtratte. I Marinari, che ſtanno di sopra nella nave operatrice ad un segno di convenzione loro dato dai Marangoni, tirano su tali cose con ordigni preparati.

275. La Campana degli urinatori opera nel mare nello ſteſſo modo, che opera un vase, allorchè ſi tuffa perpendicolarmente nell'acqua colla bocca all'ingiù (252.). A misura che ſi sprofonda nell'acqua del mare, l'aria interna ſi riduce a minor volume in virtù della preſſione, che su di eſſa esercita l'acqua sottopoſta. Però l'acqua a poco a poco vi s'innalza dentro la campana, di modo che queſta reſta piena di acqua ſino alla sua metà, allorchè la profondità dell'immerſione è di $32 + \frac{2}{3}$, ſino a due terzi, allorchè è di $65 + \frac{1}{3}$, ſino a tre quarti della sua capacità, allorchè è di 98 piedi parigini, dovendo eſſere i volumi occupati dall'aria condensata in ragione inversa delle forze comprimenti. Quindi s'intende, quanto comodiſſimamente ſia ſtata data alla Macchina la forma di un cono troncato. Im-

perocchè, riſtringendoſi la capacità della campana dalla base inferiore, dove quella è grandiſſima, ſino alla superiore, quando la Macchina ſi cala ad una ragionevole profondità, l'acqua non può dentro di eſſa elevarſi a grand'altezza, e quindi bagnare gran parte del corpo del Marangone. Nel reſto quando la profondità della discesa è molto grande, allora il Marangone rimane quaſi coperto di acqua.

276. A misura che ſi condensa l'aria nella Campana, cresce anche la denſità dell'aria nel corpo del Marangone, spandendoſi l'aria condensata della Campana, mentre viene introdotta col mezzo della respirazione, in tutte le di lui cavità. Per queſta ragione il Marangone, benchè patisca eſteriormente una preſſione enorme, non ne reſta gravemente incomodato (270.), purchè spropoſitata non ſia la profondità della sua discesa. Perchè poi poſſa l'aria, a misura che a poco a poco ſi condensa nella Campana, inſinuarſi anche a poco a poco nelle cavità del corpo del Marangone, ſi deve calar giù la Macchina adagio, adagio. Similmente perchè l'aria ridotta nel corpo dello ſteſſo al fondo del mare ad un grado eccesſſivo di condensazione non ſi sviluppi in vigore della sua eccesſſiva elaſticità con velocità capace di rompere le tuniche dei vaſi, bisogna tirar su la Macchina lentamente. Quando ſi ha queſto riguardo sì nel calarla all'ingiù, come nel tirarla all'insù, la vita del Marangone è fuori di pericolo.

277. Il solo incomodo, che accompagna il Marangone nella sua discesa, osserva il Sig. Halley nella sua Memoria *Sull' arte di vivere sott' acqua* inserita nel saggio delle Transazioni filosofiche della Società Regia compendiate da Beniamino Mottes tom. 2.°, il solo incomodo, dico, è quello delle orecchie, dentro le quali vi sono delle cavità, che solamente si aprono verso al di fuori, e che per dentro comunicano con meati, e passaggi sì piccoli, che ammettono neppure l'aria stessa, quando non sieno dilatati, e distesi da una forza considerabile. Quindi al primo scendere della Campana s' incomincia a sentire su ambedue le orecchie una pressione, che a poco a poco si rende penosa, come se una penna venisse sforzatamente dentro di quelle spinta, finchè la forza dell' aria superando l' ostacolo, che tiene stretti li suddetti meati, ossia finchè questi cedendo alla forza dell' aria si dilatino un poco, e lascino scorrervi dentro un poco di aria condensata, e allora subito ne succede il sollievo. Ma la Campana continuando la sua discesa nell' acqua, il dolore rinnovasi, e di bel nuovo nella stessa guisa avviene l' alleviamento. Per lo contrario, allorchè la Campana viene tirata su alla superficie, l' aria condensata trovando nella sua uscita un passaggio più libero, non apporta della pena al Marangone. Questa forza, che fa l' aria condensata su i meati uditorj non arreca nissun pregiudizio agli organi dell' udito,

ficcome ci accerta la sperienza. Son quafi tutte parole del sullodato Autore. Un Marangone, che fi credeva più aftuto degli altri, riferisce il Sig. Martin Clare nella sua opera già citata, riempì di carta mafticata gli orecchi, credendo di evitare in quefto modo il dolore. Ma egli nè reftò ingannato. Imperocchè, crescinta ad un certo segno la preffione, non solamente sentì il dolore, come se gli orecchi foffero liberi, ma di più tanto in quefti vi s' internò la carta, che la man del Chirurgo trovò molta difficoltà per cavarla fuori.

278. Tutte le scoperte sono sul principio imperfette, e fi migliorano poi, allorchè fi fa offervazione su i loro difetti. La Macchina Urinatoria avea nella sua prima invenzione tre grandi difetti, che fieguono.

I. Per la mancanza della luce erano obbligati i Marangoni, quando dentro di effa scendevano nell' acqua, a portar seco delle candele accese; il che era di grandiffimo pregiudizio alla respirabilità dell'aria rinchiusa. Imperocchè c'insegna la Fifica, che il gas offigene dell'aria non è solamente il pascolo della vita, ma eziandio della combuftione, coficchè, ficcome senza di quello niffun animale può vivere, così anche niffun combuftibile può ardere: che la combuftione toglie all'aria dell' atmosfera il suo gas offigene, combinandofi l'offigene nell'atto della combuftione colla materia del corpo, che arde, men-

tre il di lui calorico diventando libero si aggiunge a quello del corpo ardente, e ne accresce il calore: che in fine una candela di sevo consuma in circa tanto di gas ossigene nella sua combustione, quanto un uomo nella sua respirazione. Le candele accese portavano anche quest'altro incomodo. L'aria nella Campana venendo dalla pressione dell'acqua ridotta ad un sì picciolo volume si riscaldava per la respirazione sì potentemente, che il suo calore si rendeva insopportabile. Ora questo calore si aumentava per l'infiammazione delle candele, mediante il calorico, che depone l'ossigene nell'atto della sua combinazione colla materia del sevo.

II. Non vi era il mezzo di cangiare l'aria rinchiusa, allorchè veniva viziata dalla respirazione dei Marangoni, e combustione delle candele, se non rimontando alla superficie dell'acqua: dal che ne seguiva, che i Marangoni non potevano, se non per poco tempo stare sott'acqua a grandi profondità, siccome facilmente intende, chi riflette alla quantità del gas ossigene, che si consuma e nella respirazione, e combustione, e al tempo, che bisogna spendere nella lenta discesa, ed ascesa della Macchina.

III. Il Marangone nelle grandi profondità stava dentro la Campana quasi intieramente coperto dall'acqua; il che gli era di grandissimo incomodo.

279. Il Sig. Halley, riflettendo su questi

non piccioli difetti della Macchina Urinatoria antica, ebbe la sorte di levarli, e di portar l'arte di andare al fondo del mare quasi alla sua perfezione. „ Trovandomi impegnato, dic'egli nella già citata Memoria, in un affare, che richiedeva il trovare il modo di continuare a stare sott'acqua, giudicai necessario il cercare di ovviare a queste difficoltà, che s'incontrano nella comune Campana Urinatoria, coll'inventare alcuna cosa, per lo cui mezzo spingerci giù l'aria, quando si stà a basso sott'acqua; per via della quale non solamente l'aria racchiusavi venisse ad esser rinfrescata, e reclutata, ma l'acqua pure anche del tutto mandata fuori in qualunque profondità, che si trovasse. Questa tal cosa io effettuai per mezzo di una invenzione tanto facile, che recherà maraviglia, che molto prima non ci sia stato pensato, e capace di fornire aria in fondo del mare in tutta quella quantità, che si possa desiderare ".

280. Fec'egli adunque una Campana di legno della capacità interiore di 60 piedi cubici Inglesi in circa in forma di un cono troncato, alla base superiore dato avendo il diametro di tre, e all'inferiore di cinque piedi. La coprì poscia di piombo sì pesante, ch'essa, benchè vota, andava al fondo, e distribuì un particolar peso intorno il fondo della stessa per farla discendere in una situazione perpendicolare alla superficie dell'acqua. Sotto alla Campana alla di-

ſtanza di tre piedi ingleſi dal fondo vi fermò un palco, oſſia un tavolato sospeso al fondo della Campana con tre corde, ciascuna caricata di cento libbre di peso per tenerlo saldo, e diritto. Finalmente liberò la Macchina degli accennati di sopra difetti nelle seguenti maniere.

281. Le tolse il primo difetto, fiſſando alla sommità di eſſa un ben solido, e chiaro vetro A come una fineſtra per ricevere dalla parte di sopra la luce. Per mezzo di queſto veniva in tempo di calma trasmeſſa tanta luce dentro la Campana, che ſi poteva leggere, e scrivere comodamente al fondo del mare, e molto più legare, o agguantare qualunque cosa, che ſi voleva raccorre. Il Sig. Halley ſteſſo riferisce di aver letto dentro la sua Campana al fondo del mare una Gazzetta. Diſſi *in tempo di calma*. Imperocchè se il mare è agitato dal vento, poichè in queſto caso i raggi della luce reſtano frequentemente rotti dal movimento dell'acqua, vi dev'eſſere al fondo del mare tanto bujo, quant'è quello della notte. Ma in queſto caso ſi può tenere accesa una candela nella Campana, giacchè in queſta, come ſi vedrà, ſi può a piacere del Marangone rinnovar l'aria. In vece di una fineſtra grande ſi poſſono aprire nella parte superiore della Campana delle più picciole, fornite tutte di una solida lente conveſſa.

282. Le tolse il secondo difetto, mettendo alla sommità della ſteſſa una chiave B per

dare

dare secondo il bisogno l'esito all'aria viziata. Il ripiego ebbe un buonissimo effetto. Il gas azoto essendo specificamente più leggiero dell'aria dell'atmosfera, tostochè viene liberato dal gas ossigene, con cui è mescolato nell'aria comune, si porta alla cima della Campana, siccome ciascun può accertarsi, mettendo due candele accese di diversa altezza sotto un recipiente pieno di aria comune posato sopra una pelle ammollata nell'acqua. Egli vedrà, che la candela, che prima si spegnerà, sarà la più alta: il che prova, che il gas azoto, che si libera dalla mistura col gas ossigene, si porta alla cima del recipiente. Quindi ne siegue, che, aprendo la chiave fissata alla sommità della Campana, deve il gas azoto esser il primo ad esserne spinto fuori. Egli è chiaro, che la pressione dell'acqua esteriore sul foro della chiave non può impedire l'uscita al gas azoto, essendo la pressione, che la stess'acqua fa dall'ingiù all'insù contro l'aria rinchiusa nella Campana maggiore.

283. Si è osservato, che ogni volta, che si lasciava andar via l'aria corrotta, questa saliva con tant'impeto, che faceva ribollire la superficie del mare, e la ricopriva di una bianca spuma. La spiegazione di questo fenomeno è facile. L'aria spinta fuori dalla Campana, essendo assai specificamente più leggiera dell'acqua, deve, siccome c'insegnano le leggi della Idrostatica, portarsi con grande velocità alla superficie del

mare. Ma poichè, a misura ch'essa si solleva per l'acqua, si scema anche la forza, che la comprime, deve nel suo veloce ascendimento sempre più spandersi in maggior volume con forza proporzionata all'eccesso della sua elasticità sopra la forza, che la comprime. Dalla forte agitazione, che produce nelle particelle dell'acqua l'aria compressa, mentre nel suo ascendimento si spande con siffatta forza in maggior volume, ne nasce insieme alla spuma il bollimento dell'acqua sino alla superficie nello stesso modo appunto, che bolle l'acqua, allorchè, messa essendo sotto il recipiente della Macchina pneumatica, viene liberata dalla pressione dell'aria esteriore.

284. Per somministrar poi aria fresca alla Campana, mentre questa stà sott'acqua, immaginò ingegnosamente il ripiego, che siegue. „ Le feci fare, *sono parole dello stesso Autore*, due barili, che tenessero circa 6186 digiti solidi ciascuno, rivestiti di piombo in modo di andare a fondo voti; ciascuno di essi avendo un cocchiume nelle parti di sotto da lasciar entrar l'acqua, a misura che l'aria entro loro nello scendere si condensasse, e da lasciarla uscire, quando venissero tirati su pieni di sott'acqua; e ad un buco nella parte superiore di questi barili io fermai un budello di cuojo a forma di calza, bene imbrattato di cera gialla, e di olio, e di una lunghezza bastante da arrivare sotto al cocchiume, venendo tenuto giù dal peso attaccato;

di modo che l'aria nella parte di sopra di questi barili non potesse scappare, se l'estremità da basso di questi budelli non venissero prima sollevate. Preparati in questa maniera i barili da contener l'aria, io gli aggiustai con certe cordicelle proporzionate a farli alternativamente alzare ed abbassare, come fanno le secchie di un pozzo; la qual cosa riuscì con tanta facilità, che due uomini con meno della metà della loro forza potevano fare tutta la fatica, che vi si richiedeva; e nel loro scendere venivano guidati da certe cordicelle attaccate all' orlo di sotto della campana, che passavano per entro degli anelli messi all'una, e all'altra banda del budello di cuojo di ogni barile; talchè sgusciando giù per via di quelle cordicelle venivano comodamente a mano di quell' uomo, che stava sul palco apposta per riceverli, e tirare su l'estremità delli budelli entro la campana. Per entro questi budelli, subitochè l'estremità loro arrivavano sopra la superficie dell'acqua nei barili, tutta l'aria, che stava racchiusa nella loro parte di sopra si scaricava con gran forza entro la campana, mentre l'acqua entrava per il cocchiume di sotto, e li riempiva; e subitochè in questa maniera l'aria di un barile era stata ricevuta, con un segnale, che si dava, quello veniva tirato su, e al tempo istesso l'altro veniva a scendere, e per mezzo di un'alternata successione forniva di aria con tale prontezza, e in tanta quantità, ed abbondanza, che io medesimo

sono ſtato uno dei cinque, che ſiamo ſtati inſieme giù in fondo circa 30 braccia sott'acqua, più di un'ora, e mezzo per volta, senza neſſuna sorte di cattiva conseguenza, e vi avrei potuto durare a ſtare, quanto io aveſſi voluto, poichè nulla in contrario appariva, che me lo impediſſe ".

285. Tolse finalmente queſt'ingegnoso Filosofo alla Campana Urinatoria anche il terzo difetto, mediante l'alterna, e rapida succeſſione dei barili di aria. Per mezzo di queſti non solamente ſi avea una continua provviſta di aria fresca, e buona alla respirazione; ma dalla forza elaſtica di queſta veniva anche a votarſi di una parte della sua acqua la campana, e quindi ad acquiſtarſi più spazio per moverſi entro, ed agire. Egli è giunto in queſto modo a liberare intieramente dall'acqua tutta quanta la cavità della Campana di maniera, che sedeva sopra una panca ſituata diametralmente vicino al fondo, veſtito dei suoi soliti panni. Che più? Il noſtro Autore arrivato alla profondità deſtinata ha potuto, levato di mezzo il palco, per uno spazio tanto largo, quanto il cerchio della Campana, asciugare il fondo del mare, coſicchè l'acqua non paſſava sopra le scarpe. Il ritorno dei barili gli apportava anche queſt'altro vantaggio non piccolo, che egli mandava su alla superficie del mare i suoi ordini scritti con una penna di ferro sopra lamine di piombo, ordinando, com'eſſo voleva, eſſer moſſo da luogo a luogo.

286. Il Sig. Halley non solamente liberò la Campana Urinatoria dei suoi difetti, ma portò di più l'arte di andar sott'acqua ad un grado di perfezione sì grande, che distaccò da quella uno dei suoi uomini ad una buona distanza, mettendogli in testa quasi in guisa di un paniere rivoltato un coperchio di piombo, che gli arrivava fino alle spalle, costrutto in maniera, che costui poteva vedere il suo cammino, e tutto ciò, che gli si affacciava. Nella cima del coperchio stava fermato un tubo di cuojo simile a quei dei barili per trasmettere al Marangone dalla Campana l'aria nuova, quando ne avea bisogno. Costui col girare di una chiave poteva da per se stesso riceverla, purchè salisse un poco più alto del luogo, da dove partiva il condotto dell'aria. In questo caso essendo la nuov'aria più densa dell'usata, essa la obbligava ad andar fuori. Il Sig. Halley non trascurò in quest'altra sua invenzione il pronto ripiego, se mai fosse seguito qualche accidente al Marangone distaccato, oppure se costui si fosse dimenticato di riserrare la sua chiave, ponendo in pericolo la campana di perder l'aria. La gente, che stava dentro di essa, avea a sua disposizione un'altra chiave, col serrar della quale ne impediva il perdimento.

287. Quei, che fanno il mestiere del Marangone, vanno ordinariamente vestiti da frenella rinforzata. Ond'è, che, quando questa è bagnata una volta, e all'acqua da essa inzuppata si è co-

municato il calore del corpo, non possono essi sentire gran freddo nel moversi qua, e là, mantenendosi l'acqua riscaldata dal contatto della cute sempre nello stesso luogo.

Dal fin qui detto facilmente s' intende,

I. Che la migliore di tutte le Campane urinatorie è senza dubbio quella del Sig. Halley. Ma di questa Macchina non si può far uso, se non di raro, e in caso di grande importanza, ossia se non quando l'oggetto è di una importanza bastevole al compenso delle spese grandi della Macchina, e del di lei maneggio.

II. Che, quantunque il Sig. Halley nella sua discesa al fondo del mare non abbia patito verun incomodo, se si prescinde da quello delle orecchie, dalla parte della pressione dell'acqua, non si deve però credere, che sarebbe stato senza, se fosse disceso a grandi profondità, essendo la sua Campana discesa sott' acqua soltanto a 30 braccia in circa, ossia a 60 piedi inglesi in circa, poichè 30 braccia = 20 jarde = 60 piedi, posta la jarda di 3 piedi inglesi.

III. Che anche senza il supplemento dei barili continuati di aria, e l' espulsione dell' aria guasta della Campana, ossia senza la rinnovazione dell' aria rinchiusa può il Marangone stare per un tempo notabile sott'acqua, purchè nella sua discesa si provveda di una buona quantità di gas ossigene, e di tratto in tratto secondo il bisogno, aperto il vase, dov' esso è condensato, lo comu-

alchi in dose sufficiente all' aria guasta. Per impedire gli effetti nocevoli, che produrrebbe nei polmoni il gas acido-carbonico mediante le sue qualità acide, se diventasse soprabbondante, bisognerebbe in questo caso metter dentro la campana dell'alcali caustico in liquore, affinchè lo assorbisse, a misura che venisse formato. Lo stesso si otterrebbe anche col mezzo dell' agitazione dell' acqua nella campana, essendo in questa solubilissimo il gas acido-carbonico.

IV. Che, quando a piacere del Marangone non si può rinnovare l' aria rinchiusa nella Campana, nè si ha gas ossigene per restituire all'aria viziata la perduta respirabilità, deve allora il Marangone, trovando guasta l'aria superiore, procurare di respirare quella di mezzo, giacchè, siccome abbiam detto di sopra, il gas azoto, tostochè viene liberato dal gas ossigene, si porta alla cima della Campana. Dissi *quella di mezzo*. Imperocchè il gas acido-carbonico, che nel tempo della respirazione si forma mediante la combinazione dell'ossigene dell'aria col carbo del sangue, essendo specificamente più grave degli altri gas, deve occupare nella Campana la parte infima. Però sarà bene in questo caso, che il Marangone sia fornito di un tubo di avorio per potere più comodamente respirare l'aria buona.

289. Si dice, s'è vero ciò, che ne racconta il Sig. Boyle, che il celebre Cornelio Drebell abbia inventato un vascelletto remigabile sott' ac-

qua, e un liquore, che restituiva all' aria viziata dalla respirazione la respirabilità. Il vascelletto fu fatto pel Re Giacomo I. della Gran Brettagna, e portava dodici rematori oltre i passaggieri. Fu provato nel Tamigi, ed una delle persone, che si trovò in quella navigazione, vivea ancora al tempo, in cui il Sig. Boyle ne scrisse la relazione. Quando l'aria nella barca era divenuta poco idonea alla respirazione, il Sig. Drebell sturando il vase pieno di quel salutare liquore, le restituiva la perduta respirabilità, siccome ha scoperto il Sig. Boyle per via di un Medico, che si maritò colla figlia dello stesso Drebell. Ma cosa era mai questo liquore, giacchè il Sig. Boyle, che ne arrivò a scuoprirne il segreto per via di una persona, cui solamente fu manifestato dal Sig. Drebell, non ne parla? Forse il gas ossigene condensato gagliardamente dentro il vase, unico pascolo sì della respirazione, come anche del fuoco? Forse un liquore, che in vigore della sua grande affinità si combina al contatto dell' aria viziata col carbo del gas acido-carbonico mentre l' ossigeno di questo reso libero si combina col calorico, e diventa gas? Ma questa ricerca, che sarebbe di grandissimo vantaggio all' umana Società, non appartiene all' Idraulica, ma bensì alla Chimica.

Fine del Tomo II.

INDICE

DEL TOMO II.

PARTE SECONDA.

LIBRO I.

Della velocità dell'acqua fluente dai fori dei vasi.

LIBRO II.

Della misura dell'acqua fluente dai fori dei vasi.

Errori del Tom. II.			*Correzione.*
Pag.	*linee*		
69	23	della sua fluidità	della sua elasticità
77	13	B*d*	C*d*
111	20	$Q : Q'$	$Q : Q''$
181	29	MZ	mZ
188	17	prendendo	perdendo
199	15	$\frac{F^2 a}{F^2 + f}$	$\frac{F^2 a}{F^2 + f^2}$
229	7	t, t'	$t : t'$
235	13	a quello	eguale a quello
242	16	$\frac{n - b^r}{n^{r-1}}$	$\frac{\overline{n - b}^{\,r}}{n^{r-1}}$
246	18	si troverà	si voterà
254	18	$Gm = F$	$G'm = F$
261	30	alla larghezza	alla lunghezza
280	6	$\frac{Ab \cdot Lb}{Lb + ab}$	$\frac{Ab \cdot Lb}{Lb - ab}$
285	20	e quindi della respirazione	e quindi della vita

Fig III
Fig. IX
Fig X
XIII
Fig XIV